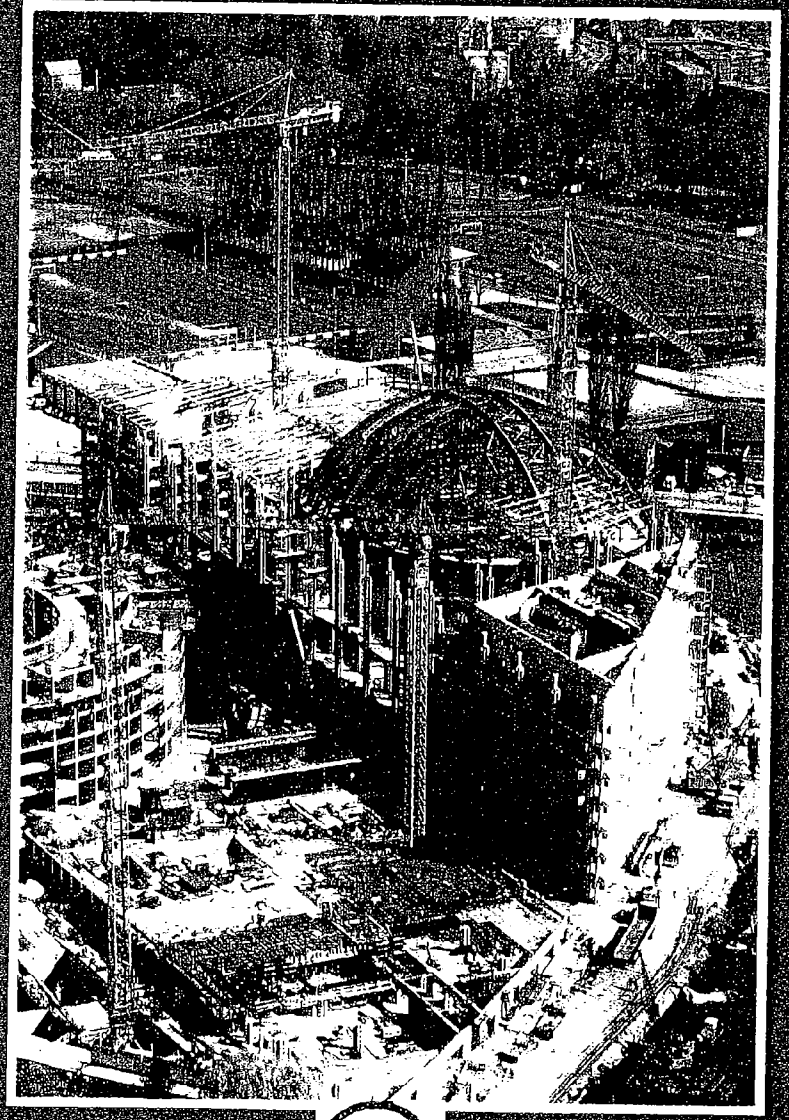
Cours de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

HENRY THONIER



4

CONCEPTION ET CALCUL DES STRUCTURES DE BÂTIMENT

Presses de l'école nationale des Ponts et chaussées

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage, sur quelque support que ce soit, sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris).

© 1996

ISBN 2-85978-265-6

Presses de l'école nationale des Ponts et chaussées

49, rue de l'Université
75007 Paris

SOMMAIRE

Tome 1

Introduction 1

1. Rappels de Résistance des Matériaux. Étude des poutres soumises à la flexion 3

1. Calcul des contraintes dans une section 3
2. Calcul de l'effort tranchant V, du moment M, de la rotation ω, de la déformée ou flèche *y* pour une charge $p = p(x)$ 4
3. Rotation à l'appui gauche pour une travée isostatique de portée L 6
4. Rotations dues à un moment C sur appui d'une travée à inertie constante I 8
5. Calcul des moments sur appuis des poutres continues. Théorème des trois moments 9
6. Poutre continue. Calcul des moments sur appuis. Méthode de Caquot 12
7. Redistribution des moments en béton armé 14
8. Règles forfaitaires en béton armé 15
9. Portée de calcul 17
10. Quelques résultats intéressants 18
11. Effort tranchant et cisaillement des pièces fléchies 21
12. Poutres continues. Sollicitations en travées 26
13. Calcul des moments de travées isostatiques. Méthode générale 32
14. Exercices 37

Tableaux de calcul de béton armé 45

2. Formulaire de calcul des poutres 69

1. Travée isostatique sur deux appuis 69
2. Console encastrée à gauche 78
3. Travée sur deux appuis, encastrée à gauche 83
4. Travée encastrée aux deux extrémités 87
5. Poutre continue de deux travées 91
6. Poutre continue de trois travées égales 101
7. Poutre continue de *n* travées égales 106

3. Actions et descente de charges 111

1. Charges permanentes 111
2. Charges d'exploitation 114
3. Action de la neige 116
4. Action du vent 118
5. Actions sismiques 129
6. Prise en compte des actions 168
7. Descente de charges 173
8. Combinaisons d'actions 193

4. Fondations superficielles 197

1. Contrainte du sol 199
2. Semelles filantes sous voile. Méthode des bielles. Charge centrée 224
3. Semelles rectangulaires sous poteau. Méthode des bielles. Charge centrée 231
4. Semelles filantes avec flexion 236
5. Semelles rectangulaires avec flexion 238
6. Semelles excentrées 271
7. Semelles nervurées 288
8. Semelles circulaires 291
9. Poutre sur sol élastique 296
10. Semelles filantes sous poteaux 306
11. Dallages 321
12. Radiers généraux 330
13. Charges concentrées sur dallage. Formules 332
14. Dallage en béton de fibre 339
15. Pathologie 340
16. Résumé. Semelle sous poteau ou voile centré. Contrainte constante 342
17. Choix du type de fondation 343

Bibliographie 345

Index 349

Tome 2

5. Fondations profondes 351

1. Définition 351
2. Actions 353
3. Combinaisons 353
4. Force portante des pieux 354
5. Capacité du sol 355
6. Capacité du pieu 358
7. Semelles sur pieux - Généralités 366
8. Pieux soumis à un effort horizontal en tête 370
9. Semelles sur pieux 410
10. Longrines 460
11. Parois moulées 462

Bibliographie 467

6. Dalles 469

1. Les planchers 469
2. Les dalles 471
3. Dalle rectangulaire articulée sur ses quatre côtés 475
4. Dalle rectangulaire. Deux côtés articulés et chacun des deux autres étant encastré, articulé ou libre 482
5. Dalle circulaire sous charge de révolution 505

6. Calcul des dalles à la rupture - Méthodes des lignes de rupture 510
7. Dalle précontrainte à cables non-adhérents 531
8. Plancher-dalle 549
9. Dalles précontraintes alvéolées 570
10. Dalles mixtes béton à bacs collaborants 589
11. Dalles de forme quelconque 595
12. Dispositions constructives 601
13. Charges sur planchers en cours de travaux 605

Bibliographie 609

7. Poutres et planchers 613

1. Calcul des planchers 613
2. Calcul des poutres continues 615
3. Planchers à entrevous 616
4. Planchers nervurés 633
5. Planchers à poutres croisées et planchers-caissons 653
6. Planchers métalliques 670
7. Liaisons éléments préfabriqués - Béton coulé sur place 686
8. Dalles avec prédalles 687
9. Plancher mixte - Poutre en acier et béton sur place 695
10. Planchers en bois 736
11. Calcul de la flèche d'un plancher 745
12. Actions des charges dynamiques sur les planchers 751
13. Points particuliers 758

Bibliographie 763

Index 771

Tome 3

8. Poteaux 779

1. Généralités 779
2. Flambement 782
3. Le flambement en béton armé 804
4. Poteaux de bâtiments en béton armé sous charges centrées et d'élancement inférieur à 70 818
5. Poteau en béton armé avec moment (ou excentricité) 820
6. Dispositions constructives 824
7. Exemple de poteau en béton armé 827
8. Programme « POTO » de calcul et ferraillage de poteau en béton armé 830
9. Poteau en béton armé suivant l'Eurocode 2 835
10. Poteau en acier suivant les CM 66 840
11. Poteau en acier suivant l'Eurocode 3 847
12. Poteau mixte acier-béton suivant l'Eurocode 4 852
13. Poteau en bois suivant l'Eurocode 5 858

14. Déversement des poutres en béton armé 860
15. Flexion déviée 862

Tableaux de calcul (flambement, déversement, poteaux en béton armé) 866

Bibliographie 874

9. Portiques et ossatures 877

1. Définitions 877
2. Portiques simples 878
3. Portiques multiples en béton armé 882
4. Ossature en acier 912
5. Programme de calcul des portiques 921
6. Poutres treillis 954
7. De la validité des résultats 978

Bibliographie 981

10. Voiles et murs 983

1. Généralités 983
2. Choix du type de voile en fonction du site 984
3. Dispositions constructives des voiles en béton armé ou non armé 987
4. Résistance des voiles 991
5. Exemples 999
6. Murs en maçonnerie non armée 1014
7. Voûtes de décharges 1032
8. Linteaux 1045
9. Poutres-cloisons 1048
10. Maçonnerie armée 1073
11. Ouvertures dans les voiles et murs 1085
12. Panneaux de maçonnerie sous charge horizontale dans leur plan 1093
13. Raccourcissement différentiel 1095
14. Calcul des voiles en béton - Méthode pratique 1124

Bibliographie 1140

Liste des programmes 1143

Annexe : Mode d'emploi des programmes de calcul de poutres « POCO » + ... 1147

Index BAEL 91 1277

Index général 1285

Tome 4

11. Contreventement 1291

1. Types de contreventement 1291
2. Caractéristiques des voiles 1293
3. Centre de torsion 1300
4. Inertie équivalente 1315

5. Répartition de l'effort extérieur suivant les différents éléments de contreventement 1327
6. Voiles avec files d'ouverture 1388
7. Changements d'inertie 1411
8. Comment limiter les déformations en tête de bâtiments dues au vent et au séisme 1416
9. Conception des contreventements 1423

Bibliographie 1430

12. Bielles et tirants 1431

1. Définitions 1431
2. Étude d'une poutre courte sous charge concentrée 1441
3. Étude d'une poutre avec charge concentrée à mi-travée 1443
4. Étude d'une poutre en Té avec charge répartie 1445
5. Étude d'un angle de portique avec moment négatif 1460
6. Étude d'un angle de portique avec moment positif 1462
7. Poutre échancrée en extrémité 1466
8. Changement de section 1471
9. Consoles 1472
10. Ouvertures dans les dalles 1480
11. Grande ouverture dans une poutre-cloison 1481
12. Poutre baïonnette 1486
13. Exemple-Étude d'une façade sans poteau par la méthode des bielles 1487

Bibliographie 1493

13. Consoles-Escaliers 1494

1. Généralités 1494
2. Consoles courantes 1494
3. Consoles courtes (corbeaux) 1504
4. Consoles longues 1514
5. Rampes 1521
6. Escaliers 1524

Bibliographie 1538

14. Étude d'un bâtiment 1539

1. Définition du projet 1539
2. Dimensionnement 1547
3. Étude d'exécution-Plans de coffrage et de ferraillage 1565

Bibliographie 1609

Annexe A : Programme « Escadre »-Espacement des cadres de poutres 1611

Annexe B : Calcul des planchers à dalles alvéolées sous charges concentrées 1619

Liste des programmes 1651

Index 1657

11. CONTREVENTEMENT

1. TYPES DE CONTREVENTEMENT

Le contreventement d'une construction est constitué de l'ensemble des éléments structuraux qui concourent à sa résistance aux actions autres que gravitaires, en général horizontales telles que le vent, les séismes, la poussée des terres.

Le contreventement des constructions est assuré généralement par un ou plusieurs des dispositifs suivants :

- portiques constitués de poutres et poteaux (voir chapitre 9, §. 3 à 5) ;
- palées de contreventement (voir chapitre 9, §. 6.2) ;
- voiles rigides simples ou composés (voir chapitre 10).

Le contreventement peut être :

- interne : voiles de refends internes, cages d'escaliers, noyau central (Fig. 1) ;
- ou externe : voiles de pignons, façades en X (Fig. 2).

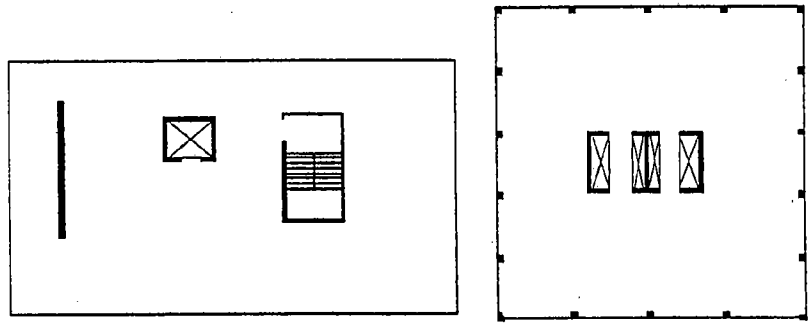


Fig. 1 – Voiles intérieurs, cages d'ascenseur et d'escalier, noyau central.

Par rapport aux nouvelles coordonnées (X,Y), les anciennes coordonnées valent :

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi \tag{6}$$

$$y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi \tag{7}$$

d'où les moments statiques :

$$\mu_x = \iint y \, dS = \iint (X \sin \varphi + Y \cos \varphi) \, dS = \mu_X \cos \varphi + \mu_Y \sin \varphi \tag{8}$$

$$\mu_y = \iint x \, dS = \iint (X \cos \varphi - Y \sin \varphi) \, dS = \mu_X \sin \varphi - \mu_Y \cos \varphi \tag{9}$$

et les moments d'inertie :

$$I_x = \iint y^2 \, dS = \iint (X^2 \sin^2 \varphi + Y^2 \cos^2 \varphi - 2 X Y \sin \varphi \cos \varphi) \, dS$$
$$= I_X \cos^2 \varphi + I_Y \sin^2 \varphi - 2 I_{XY} \sin \varphi \cos \varphi \tag{10}$$

$$I_y = \iint x^2 \, dS = \iint (X^2 \cos \varphi + Y^2 \sin \varphi + 2 X Y \sin \varphi \cos \varphi) \, dS$$
$$= I_X \sin^2 \varphi + I_Y \cos^2 \varphi + 2 I_{XY} \sin \varphi \cos \varphi \tag{11}$$

$$I_{xy} = \iint xy \, dS = \iint [(X^2 - Y^2) \sin \varphi \cos \varphi + X Y (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \, dS$$
$$= (I_Y - I_X) \sin \varphi \cos \varphi + I_{XY} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \tag{12}$$

Remarques

1. La somme des moments d'inertie par rapport aux deux axes est constante quel que soit l'angle φ :

$$I_x + I_y = I_X (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + I_Y (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = I_X + I_Y$$

2. Il existe un angle φ tel que $I_{xy} = 0$. Il correspond à :

$$\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = \frac{I_{XY}}{I_X - I_Y} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varphi \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y}.$$

Ces axes sont appelés axes principaux d'inertie. Les valeurs I_x et I_y représentent les valeurs maximale et minimale des moments d'inertie en fonction de l'angle φ. En effet, leurs dérivées sont nulles :

$$\frac{dI_x}{d\varphi} = -2 I_X \sin \varphi \cos \varphi + 2 I_Y \sin \varphi \cos \varphi + 2 I_{XY} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 2 I_{xy} = 0$$

de même $\dfrac{dI_y}{d\varphi} = 0.$

2.2. *EFFETS D'UNE TRANSLATION DE COMPOSANTES* a *PARALLÈLE AUX ABSCISSES et* b *PARALLÈLE AUX ORDONNÉES*

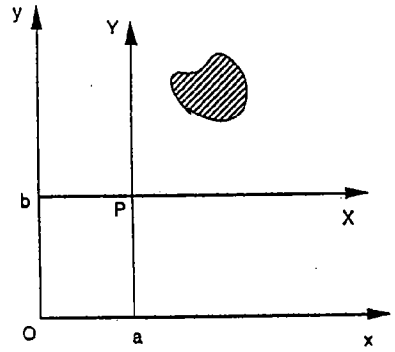


Fig. 5 – Translation (a,b).

Les anciennes coordonnées sont égales à (Fig. 5) :

$$x = X + a \tag{13}$$

$$y = Y + b \tag{14}$$

d'où :

$$\mu_x = \iint y \, dS = \iint (Y + b) \, dS = \mu_X + b S \tag{15}$$

$$\mu_y = \mu_Y + a S \tag{16}$$

$$I_x = \iint y^2 \, dS = \iint (Y^2 + b^2 + 2 Y b) \, dS = I_X + 2 b \mu_X + b^2 S \tag{17}$$

$$I_y = I_Y + 2 a \mu_Y + a^2 S \tag{18}$$

$$I_{xy} = \iint (X + a)(Y + b) \, dS = \iint (X Y + b X + a Y + a b) \, dS$$
$$= I_{XY} + b \mu_Y + a \mu_X + a b S \tag{19}$$

2.3. *CARACTÉRISTIQUES D'UN VOILE COMPOSÉ*

Considérons un voile composé de n rectangles ayant les caractéristiques suivantes :
– épaisseur t_i ;
– longueur h_i ;
– aire S_i ;

– moments statiques par rapport à leur centre de gravité G_i nuls par définition du centre de gravité ;
– moments d'inertie principaux : $I_{Xi} = t_i\, h_i^3/12$ et $I_{Yi} = h_i\, t_i^3/12$;
– coordonnées du centre de gravité : a_i et b_i par rapport à un repère général d'axes Oxy ;
– inclinaison $\varphi = (G_i y_i\,,\, G_i Y_i)$ de leur axe principal de longueur h par rapport à Oy.

Nous pouvons calculer :

– l'aire totale $S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} t_i\, h_i$ (20)

– les coordonnées du centre de gravité G du voile composé dans le repère Oxy :

$$x_G = \frac{\sum S_i a_i}{S} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\sum S_i b_i}{S} \tag{21}$$

– les inerties individuelles par rapport au système d'axes $G_i x_i y_i$ passant par leur centre de gravité G_i et parallèle aux axes Ox et Oy avec une rotation d'angle φ_i (avec $I_{XYi} = 0$) :

$$I_{xGi} = I_{Xi} \cos^2 \varphi + I_{Yi} \sin^2 \varphi$$

$$I_{yGi} = I_{Xi} \sin^2 \varphi + I_{Yi} \cos^2 \varphi$$

$$I_{xyGi} = (I_{Yi} - I_{Xi}) \sin \varphi \cos \varphi$$

– puis par une translation $(a_i\,,\, b_i)$ par rapport au point O :

$$I_{xoi} = I_{xGi} + b_i^2\, S_i \tag{22}$$

car $\mu_X = 0$ par définition du centre de gravité :

$$I_{yoi} = I_{yGi} + a_i^2\, S_i \tag{23}$$
$$I_{xyoi} = I_{xyGi} + a_i\, b_i\, S_i \tag{24}$$

Pour obtenir les caractéristiques du voile composé par rapport à son centre de gravité G, on effectue une translation de composantes $a_i - x_{Gi}$ et $b_i - y_{Gi}$.

$$I_x = \sum I_{xoi} \tag{25}$$

$$I_y = \sum I_{yoi} \tag{26}$$

$$I_{xy} = \sum I_{xyoi} \tag{27}$$

2.4. EXEMPLE 1

Calculer les moments d'inertie du voile composé de la figure 6 par rapport aux axes parallèles aux axes Ox et Oy et passant par le centre de gravité G de l'ensemble.

L'angle φ_i représente l'angle $(Oy, G_i Y_i)$.

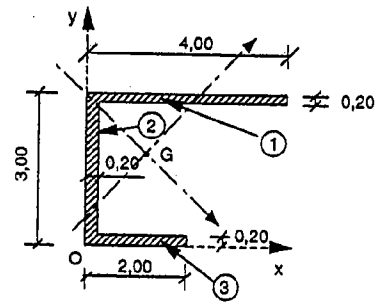


Fig. 6 – Exemple de voile composé.

	Notation	Formule	Unité	Voile 1	Voile 2	Voile 3	Somme
Épaisseur	t_i		m	0,2	0,2	0,2	
Longueur	h_i		m	3,8	3	1,8	
Angle	φ_i		°	90	0	90	
Absc. cdg	a_i		m	2,1	0,1	1,1	
Ord. cdg	b_i		m	2,9	1,5	0,1	
Aire	S_i	$t_i\, h_i$	m^2	0,7600	0,6000	0,3600	1,7200
Inerties princip.	I_{Xi}	$t_i\, h_i^3/12$	m^4	0,9145	0,4500	0,0972	1,4617
	I_{Yi}	$h_i\, t_i^3/12$	m^4	0,0025	0,0020	0,0012	0,0057
		$S_i\, a_i$	m^3	1,5960	0,0600	0,3960	2,0520
		$S_i\, b_i$	m^3	2,2040	0,9000	0,0360	3,1400
Inerties	I_{xGi}	$I_{Xi} \cos^2 \varphi_i + I_{Yi} \sin^2 \varphi_i$	m^4	0,0025	0,4500	0,0012	0,4537
par rapport à G_i	I_{yGi}	$I_{Xi} \sin^2 \varphi_i + I_{Yi} \cos^2 \varphi_i$	m^4	0,9145	0,0020	0,0972	1,0137
	I_{xyGi}	$(I_{Yi} - I_{Xi}) \sin\varphi_i \cos\varphi_i$	m^4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Centre de gravité	x_G	$\sum(S_i\, a_i) / \sum(S_i)$	m	1,1930
	y_G	$\sum(S_i\, b_i) / \sum(S_i)$	m	1,8256

On effectue une translation de $a_i - x_G$ et $b_i - y_G$ pour obtenir les caractéristiques par rapport à G.

				Voile 1	Voile 2	Voile 3	Somme
		$a_i - x_G$	m	0,9070	- 1,0930	- 0,0930	
		$b_i - y_G$	m	1,0744	- 0,3256	- 1,7256	
		$(a_i - x_G)^2 S_i$	m^4	0,6252	0,7168	0,0031	
		$(b_i - y_G)^2 S_i$	m^4	0,8773	0,0636	1,0719	
		$(a_i - x_G)(b_i - y_G) S_i$	m^4	0,7406	0,2135	0,0578	
$I_{xG} = \sum I_{xi}$	I_{xi}	$I_{xGi} + (b_i - y_G)^2 S_i$	m^4	0,8799	0,5136	1,0731	2,4666
$I_{yG} = \sum I_{yi}$	I_{yi}	$I_{yGi} + (a_i - x_G)^2 S_i$	m^4	1,5397	0,7188	0,1003	2,3588
$I_{xyG} = \sum I_{xyi}$	I_{xyi}	$I_{xyGi} + (a_i - x_G)$ $(b_i - y_G) S_i$	m^4	0,7406	0,2135	0,0578	1,0119
Angle axes principaux	α	0,5 Arctg $[2 I_{xyG} / (I_{xG} - I_{yG})]$	°				43,48
Inerties principales	I_1	$I_{xG} \cos^2\alpha + I_{yG} \sin^2\alpha + 2 I_{xyG} \sin\alpha \cos\alpha$	m^4				3,4261
	I_2	$I_{xG} \cos^2\alpha + I_{yG} \sin^2\alpha - 2 I_{xyG} \sin\alpha \cos\alpha$	m^4				1,3994

L'angle α représente l'angle (axe d'inertie principale,Oy).

On trouve les inerties d'ensemble par rapport au repère O*xy* :

I_{xG} 2,4666 m^4
$I_{yG} = 2,3588\ m^4$
$I_{xyG} = 1,0119\ m^4$

2.5. EXEMPLE 2

Détermination des caractéristiques mécaniques du voile de la figure 7 par rapport au repère O*xy*.

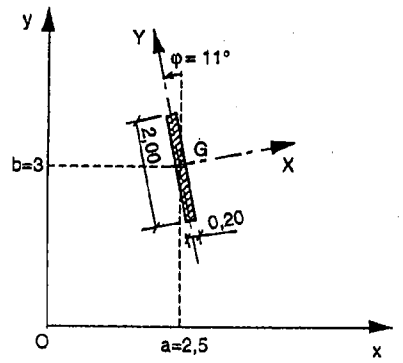


Fig. 7 – Exemple de calcul des moments d'inerties d'un voile simple.

• Caractéristiques par rapport au repère GXY

Aire $S = 0,2 \times 2 = 0,4\ m^2$
Inerties :

$I_{GX} = 0,2 \times 2^3/12 = 0,13333\ m^4$
$I_{GY} = 2 \times 0,2^3/12 = 0,001333\ m^4$
$I_{GXY} = 0$ car les axes GX et GY sont des axes de symétrie orthogonaux, donc axes principaux d'inertie.

• Rotation d'angle $\varphi = 11°$

$I_{Gx} = I_{GX} \cos^2\varphi + I_{GY} \sin^2\varphi = 0,12857\ m^4$
$I_{Gy} = I_{GX} \sin^2\varphi + I_{GY} \cos^2\varphi = 0,006139\ m^4$
$I_{Gxy} = (I_{GY} - I_{GX}) \sin\varphi \cos\varphi = -0,024724\ m^4$

• Translation : a = 2,5 et b = 3,0

$I_{ox} = I_{Gx} + b^2 S = 3,72853\ m^4$
$I_{oy} = I_{Gy} + a^2 S = 2,50614\ m^4$
$I_{oxy} = I_{Gxy} + a\,b\,S = 2,97528\ m^4$

Remarque

Un élément entièrement situé dans le premier quadrant (ou le troisième) a un moment d'inertie composé positif. Ici, on vérifie bien que I_{Gxy} est négatif et que I_{oxy} est positif.

3. CENTRE DE TORSION

3.1. ÉTUDE D'UN VOILE EN U SYMÉTRIQUE (Fig. 8)

Considérons une console d'axe vertical Oz soumise à un moment positif M (et à un effort tranchant V) qui entraîne une compression de l'aile supérieure avec une contrainte que l'on peut supposée constante sur toute son épaisseur t (voir en 3.4 ci-après) et qui vaut $\sigma = \frac{M\nu}{I}$ où I représente le moment d'inertie (ou inertie en abrégé) de l'ensemble du U par rapport à son centre de gravité G.

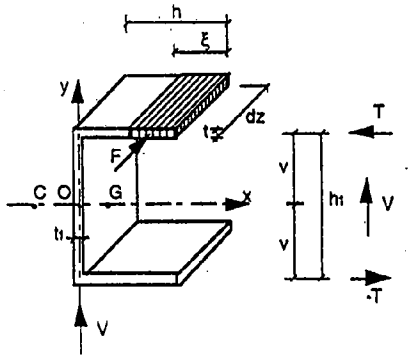


Fig. 8 – Voile symétrique - Centre de torsion.

L'équilibre du bloc hachuré (Fig. 8), délimité par deux plans parallèles espacés de dz est assuré par :
- une compression $F = \sigma\, t\, \xi$ sur la face avant ;
- une compression $F + dF = (\sigma + d\sigma)\, t\, \xi$ sur la face arrière ;
- un cisaillement le long de la face gauche de la partie hachurée $\tau\, t\, dz$ soit $t\, \xi\, d\sigma = \tau\, t\, dz$

Or la contrainte s'exprime en fonction du moment par :

$\sigma = \frac{M\nu}{I}$ et sa différentielle $d\sigma = \frac{dM\nu}{I}$

d'où $t\, \xi\, d\sigma = \tau\, t\, dz$ et $\tau = \frac{\xi d\sigma}{dz} = \frac{\nu \xi dM}{I dz} = \frac{V\nu\xi}{I}$.

Ce cisaillement, sur une face perpendiculaire au plan Oxy, se retrouve dans le plan Oxy, (théorème de Cauchy, voir chapitre 1, §. 11.2).

Il en résulte un effort horizontal, parallèle à Ox : $T = -\int \tau\, t\, d\xi$ qui varie linéairement de 0 à l'extrémité droite jusqu'à son maximum, en valeur absolue, à sa jonction avec l'âme :

$$T_{max} = -\int_0^h \tau t d\xi = -\frac{V\nu t}{I}\int_0^h \xi d\xi$$

$$T_{max} = -\frac{V\nu t h^2}{2I} \qquad (28)$$

ou $T_{max} = -\frac{V h_1 t h^2}{4I}$, puisque la section est symétrique avec $\nu = \nu' = h_1 / 2$.

L'aile supérieure est donc soumise à un effort horizontal T. Il en est de même pour l'aile inférieure, mais de signe opposé (traction au lieu de compression). Ces deux forces forment un couple de torsion $C_t = \frac{V h_1^2 t h^2}{4I}$ qui fait tourner le voile, bien que l'effort appliqué V soit appliqué au droit de l'âme, élément résistant à l'effort tranchant.

On peut éviter ce couple de torsion si l'on applique l'effort V non en O, mais en C à une distance δ de O telle que :

$$\delta V = C_t = -\frac{V h_1^2 t h^2}{4I} \quad \text{d'où} \quad \delta = OC = -\frac{h_1^2 t h^2}{4I} \qquad (29)$$

Le point C est appelé centre de torsion.

Le cisaillement dans l'âme à la cote y vaut $\tau(y) = \frac{V\mu(y)}{t_1 I}$ (voir chapitre 1, §. 11.1, formule 37) où $\mu(y)$ représente le moment statique par rapport au centre de gravité de l'ensemble de ce qui est situé au-dessus de la cote y.

Posons $\varepsilon = \frac{th}{t_1 h_1}$ et $\nu = \frac{y}{h_1}$. On obtient ainsi :

$$\mu(y) = t\, h\, \frac{h_1}{2} + \frac{t_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right) = t\, h_1^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{8} - \frac{\nu^2}{2}\right)$$

et $I = \frac{t\, h\, h_1^2}{2} + \frac{t_1 h_1^3}{12} = t\, h_1^3 \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{12}\right)$

$$\tau(y) = \frac{V}{t_1 h_1} \frac{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{8} - \frac{\nu^2}{2}}{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{12}} = \frac{V}{t_1 h_1} \frac{12\varepsilon + 3 - 12\nu^2}{12\varepsilon + 2}$$

Remarque
Pour une seule section rectangulaire, sans aile, $\varepsilon = 0$ et avec $\nu = 0$, le cisaillement maximal vaut $\tau = \frac{3}{2} \frac{V}{t_1 h_1}$, valeur bien connue (chapitre 1, §. 11.2, éq. 40).

Pour une âme ultra-mince : $\varepsilon = \infty$ et $V_{max} = \frac{V}{t_1 h_1}$.

Le cisaillement varie de $\frac{V}{t_1 h_1}$ pour une âme ultra-mince à $\frac{1{,}5V}{t_1 h_1}$ pour une âme rectangulaire seule (sans aile).

Le cisaillement conventionnel de béton armé $\tau = \frac{V}{t_1 d} \approx \frac{V}{0{,}9 t_1 h_1}$ qui est valable pour une section rectangulaire, l'est *a fortiori* pour une section composée, car le cisaillement de cette dernière est plus faible.

• Calcul de la part d'effort tranchant repris par l'âme

$$T_a(y) = \int_y^{0,5h} \tau(y) t_1 \, dy = V \int_\nu^{0,5} \frac{12\varepsilon + 3 - 12\nu^2}{12\varepsilon + 2} \, d\nu = \frac{V}{12\varepsilon + 2} [(12\varepsilon + 3)(0{,}5 - \nu) - 0{,}5 + 4\nu^3]$$

Pour $y = 0$: $T_a(0) = \frac{V}{12\varepsilon + 2}(6\varepsilon + 1) = \frac{V}{2}$ pour une demi-âme et V pour l'âme entière.

Ainsi, l'âme reprend bien la totalité de l'effort tranchant.

EXEMPLE (Fig. 9)

Calcul de l'effort transversal dans les ailes :
– épaisseur des voiles : 0,15 m ;
– moment d'inertie de l'ensemble par différence de deux rectangles :

$$I = \frac{2 \times 3^3}{12} - \frac{1{,}85 \times 2{,}7^3}{12} = 1{,}466 \text{ m}^4$$

$$T_{max} = \frac{V h_1 t h^2}{4I} = \frac{2{,}85 \times 15 \times 1{,}925^2}{4 \times 1{,}466} V = 0{,}271 V$$

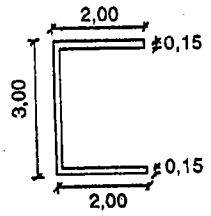


Fig. 9 – Exemple de voile en U symétrique.

$$\delta = -\frac{T_{max} h_1}{V} = -0{,}772 \text{ m}$$ par rapport à l'axe de l'âme.

Remarque
Pour un voile composé constitué de voiles simples, tous concourant en A, le centre de torsion est situé au point A, car c'est par lui que passent les résultantes de chaque voile simple.

3.2. ÉTUDE D'UN VOILE COMPOSÉ D'UNE SUITE D'ÉLÉMENTS RECTANGULAIRES

Soit un voile composé d'éléments rectangulaires successifs : L, U et Z symétriques ou dissymétriques, cages ouvertes, etc (Fig. 10b).

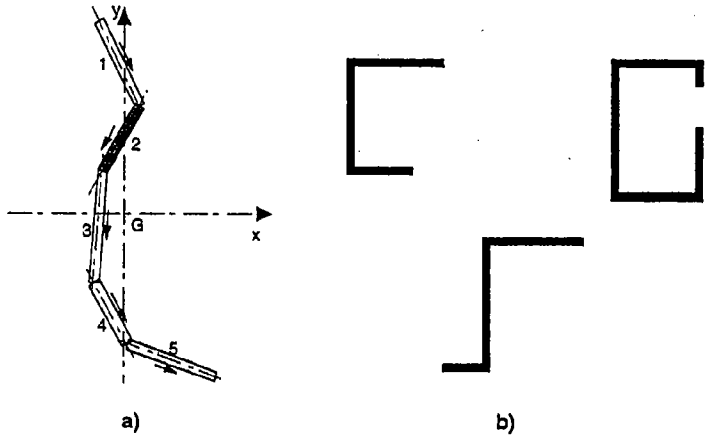


Fig. 10 – Types de voiles « unicursaux » (flèche = sens de description des rectangles).

Considérons un des éléments du voile composé (Fig. 11) :
– t et h = dimensions de l'élément rectangulaire ;
– O = centre du rectangle, de coordonnées a et b dans un repère Gxy ;
– G = centre de gravité du voile composé ;
– φ = angle (Gy, Os) ;

– s = abscisse le long de l'axe longitudinal du rectangle (plus grande inertie) orienté vers le rectangle suivant ;
– I_x et I_y = inerties du voile composé par rapport aux axes Gx et Gy.

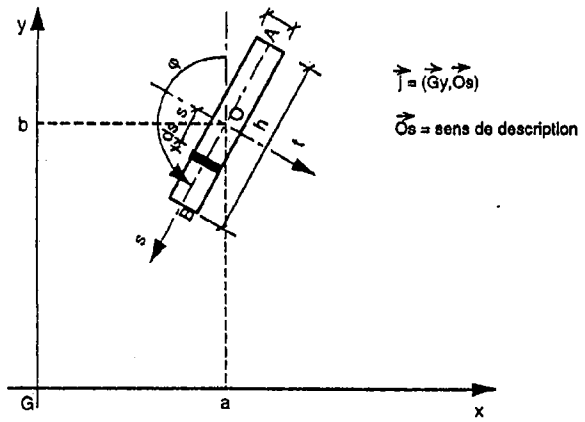


Fig. 11 – Elément n° 2 du voile composé de la figure 10.

On suppose que l'épaisseur t est faible par rapport à la longueur h.

3.2.1. Effort extérieur V parallèle à Gy

Pour une flexion autour de l'axe Gx, de moment M_x et d'effort tranchant $V_y = \dfrac{dM_x}{dz}$, on a une contrainte normale de flexion $\sigma = \dfrac{M_x y}{I_x}$ pour une ordonnée $y = b + s\cos\varphi$.

L'élément différentiel de surface $dS = t\,ds$ reçoit un effort normal $\sigma\,dS$, dont l'intégrale entre s et $h/2$ vaut :

$$F = \int_s^{h/2} \sigma dS = \int_s^{h/2} \frac{M_x}{I_x}(b - s\cos\varphi)\, t\, ds = \frac{M_x t}{I_x}\left[bs - \frac{s^2}{2}\cos\varphi\right]_s^{h/2}$$

$$= \frac{M_x t}{I_x}\left[b\left(\frac{h}{2} - s\right) - \left(\frac{h^2}{4} - s^2\right)\frac{\cos\varphi}{2}\right]$$

L'effort de glissement g par unité de longueur dans le plan Otz, perpendiculaire au plan de la figure, vaut (c'est le même raisonnement que pour l'étude de la jonction table-nervure des tables en Té, voir chapitre 1, § 11.3) :

$$g = \frac{dF}{dz} = \frac{V_y t}{I_x}\left[b\left(\frac{h}{2} - s\right) - \left(\frac{h^2}{4} - s^2\right)\frac{\cos\varphi}{2}\right].$$

En B, pour $s = -h/2$: $g_B = \dfrac{V_y t b h}{I_x}$.

Le cisaillement dû à ce glissement dans le plan Otz entre deux plans parallèles à Ost et espacés de dz est tel que $t\,\tau = -\dfrac{dF}{dz} = -g$ d'où :

$$\tau = -\frac{g}{t} = -\frac{V_y}{I_x}\left[b\left(\frac{h}{2} - s\right) - \left(\frac{h^2}{4} - s^2\right)\frac{\cos\varphi}{2}\right]$$

D'après Cauchy (voir chapitre 1, §. 11.2), le cisaillement sur la facette Ost a la même valeur, d'où l'effort d'entraînement le long de l'axe Os :

$$T = \int_s^{h/2} \tau t ds = -\frac{V_y t}{I_x}\int_s^{h/2}\left[b\left(\frac{h}{2} - s\right) - \left(\frac{h^2}{4} - s^2\right)\frac{\cos\varphi}{2}\right] ds$$

$$= \frac{V_y t}{I_x}\left[\frac{bhs}{2} - \frac{bs^2}{2} - \left(\frac{h^2 s}{4} - \frac{s^3}{3}\right)\frac{\cos\varphi}{2}\right]_s^{h/2}$$

soit en B avec $s = -\dfrac{h}{2}$: $T_B = -\dfrac{V_y t}{I_x}\left[\dfrac{bh^2}{2} - \dfrac{h^3\cos\varphi}{12}\right]$.

• Succession de rectangles

Soient g_A et T_A les valeurs des efforts de glissement et d'entraînement dus aux éléments rectangulaires précédents. L'effort de glissement en A (Fig. 11) provoque un cisaillement dans le plan Otz égal à $\tau = -\dfrac{g_A}{t}$ et un effort d'entraînement dans le plan Ost :

$$T = \int_s^{h/2} \tau t ds = -\int_s^{h/2} g_A ds = -g_A\left(\frac{h}{2} - s\right)$$ qui vaut en B : $T = -gA\,h$ d'où globalement sous forme vectorielle :

$$\overline{T_B} = \overline{T_A} - \frac{V_y t}{I_x}\left[\frac{bh^2}{2} - \frac{h^3\cos\varphi}{12}\right]\overline{i} - gA\,h\,\overline{i}$$

si $\overline{i}$ représente le vecteur unitaire de l'axe Os.

En projetant sur les deux axes généraux Gx et Gy, on peut déterminer les composantes T_x et T_y de l'effort résultant des n rectangles et le moment C par rapport à G de ces mêmes efforts :

$$T_x = \sum_{i=1}^{n} (T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i$$

$$T_y = -\sum_{i=1}^{n} (T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$$

$$C = -\sum_{i=1}^{n} b_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i - a_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$$

avec $$T_i = -\frac{V_y t_i}{I_x}\left[\frac{b_i h_i^2}{2} - \frac{h_i^3 \cos \varphi_i}{12}\right]$$

$$g_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{V_y\, t_j\, b_j\, h_j}{I_x}$$

La droite support de la résultante est définie par son ordonnée à l'origine $-\frac{C}{T_x}$ et son abscisse à l'origine $\frac{C}{T_y}$ d'où l'équation de la droite support sous la forme :

$u_1 x + v_1 y - 1 = 0$ avec $u_1 = \frac{T_y}{C}$ et $v_1 = -\frac{T_x}{C}$.

3.2.2. Effort extérieur V parallèle à G*x*

De même pour la flexion autour de l'axe G*y* avec un moment M_y, un effort tranchant V_x et un moment d'inertie I_y, on trouve :

$$T_i = -\frac{V_x\, t_i}{I_y}\left[\frac{a_i h_i^2}{2} + \frac{h_i^3 \sin \varphi_i}{12}\right]$$

$$g_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{V_x\, t_j h_j}{I_y}$$

On détermine les composantes de T_i suivant les axes G*x* et G*y* par :

$$T_x = \sum (T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i$$

$$T_y = -\sum (T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$$

et le moment C par rapport à G :

$$C = -\sum b_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i - a_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$$

La droite support de la résultante est définie par son ordonnée à l'origine $-\frac{C}{T_x}$ et son abscisse à l'origine $\frac{C}{T_y}$ d'où l'équation de la droite support sous la forme :

$$u_2 x + v_2 y - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad u_2 = \frac{T_y}{C} \quad \text{et} \quad v_2 = -\frac{T_x}{C}.$$

Le point de concours de ces deux droites représente le centre de torsion C. Ses coordonnées sont données dans le repère G*xy* par :

$$x_C = (v_1 - v_2) / (u_2 v_1 - u_1 v_2)$$
$$y_C = (u_2 - u_1) / (u_2 v_1 - u_1 v_2)$$

Ainsi, tout effort extérieur passant par C peut se décomposer en V_x parallèle à G_x et V_y parallèle à G_y, chacune des deux composantes, passant par C, ne produit aucun moment de torsion.

Pour une force ne passant pas par le centre de torsion, la section subit un moment de torsion égal au moment de cette force par rapport au centre de torsion.

3.2.3 - Application numérique

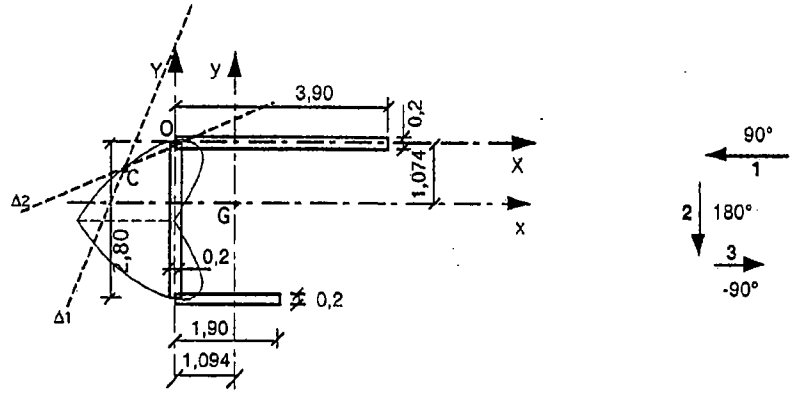


Fig. 12 – Exemple de recherche du centre de torsion.

Caractéristiques des voiles

	Notations	Formule	Unité	1	2	3	
épaisseur	t_i	*donnée*	*m*	*0,2*	*0,2*	*0,2*	
longueur	h_i	*donnée*	*m*	*3,9*	*2,8*	*1,9*	
orientation	φ_i	*donnée*	°	90	180	− 90	
"	φ_i		rd	1,571	3,142	− 1,571	
absc. cdg	a_i	*donnée*	*m*	*1,950*	*0,000*	*0,950*	
ord. cdg	b_i	*donnée*	*m*	*0,000*	*− 1,400*	*− 2,800*	Somme
aire	S_i	$t_i\, h_i$	m^2	0,7800	0,5600	0,3800	1,7200
inerties principales	I_{xi}	$t_i\, h_i^3 / 12$	m^4	0,9887	0,3659	0,1143	1,4688
"	I_{yi}	$h_i\, t_i^3 / 12$	m^4	0,0026	0,0019	0,0013	0,0057
moments statiques		$S_i\, a_i$	m^3	1,5210	0,0000	0,3610	1,8820
"		$S_i\, b_i$	m^3	0,0000	− 0,7840	− 1,0640	−1,8480
inerties par rapport à G	I_{xGi}	$I_{xi} \cos^2 \varphi_i + I_{yi} \sin^2 \varphi_i$	m^4	0,0026	0,3659	0,0013	
"	I_{yGi}	$I_{xi} \sin^2 \varphi_i + I_{yi} \cos^2 \varphi_i$	m^4	0,9887	0,0019	0,1143	
"	I_{xyGi}	$(I_{yi} - I_{xi}) \sin \varphi_i \cos \varphi_i$	m^4	0,0000	0,0000	0,0000	

centre de gravité	x_G	$\Sigma(S_i\, a_i) / \Sigma(S_i)$	m	1,0942	
	y_G	$\Sigma(S_i\, b_i) / \Sigma(S_i)$	m	− 1,0744	

par rapport à G		$a_i - x_G$	m	0,8558	− 1,0942	− 0,1442	
"		$b_i - y_G$	m	1,0744	− 0,3256	− 1,7256	
		$(a_i - x_G)^2\, S_i$	m^4	0,5713	0,6705	0,0079	
		$(b_i - y_G)^2\, S_i$	m^4	0,9004	0,0594	1,1315	
		$(a_i - x_G)(b_i - y_G)\, S_i$	m^4	0,7172	0,1995	0,0945	
inerties de l'ensemble	I_{xi}	$I_{xGi} + (b_i - y_G)^2\, S_i$	m^4	0,9030	0,4252	1,1328	2,4610
par rapport à Oxy	I_{yi}	$I_{yGi} + (a_i - x_G)^2\, S_i$	m^4	1,5599	0,6723	0,1222	2,3545
"	I_{xyi}	$I_{xyG_i} + (a_i - x_G)(b_i - y_G)\, S_i$	m^4	0,7172	0,1995	0,0945	1,0113
angle (OI_1, Oy)	α	$0{,}5\ \mathrm{Arctg}\ (2\, \Sigma I_{xyi} / (\Sigma I_{xi} - \Sigma I_{yi})$	rd				0,7591
"	α		°				43,492
inerties principales	I_1	$\Sigma I_{xi} \cos^2 \alpha + \Sigma I_{yi} \sin^2 \alpha + 2\, \Sigma I_{xi}\, \Sigma I_{yi} \sin\alpha \cos\alpha$	m^4				3,4204
par rapport à OXY	I_2	$\Sigma I_{xi} \sin^2 \alpha + \Sigma I_{yi} \cos^2 \alpha - 2\, \Sigma I_{xi}\, \Sigma I_{yi} \sin\alpha \cos\alpha$	m^4				1,3951

Pour V = 1 parallèle à Oy

		Formule		1	2	3	
effort par élément	T_i	$-t(bh^2/2 - h^3 \cos\varphi / 12) / I_x$	kN	− 0,6640	− 0,0449	0,2531	
glissement par élément	g_o	tbh / I_x	kN	0,3405	− 0,0741	− 0,2664	
glissement cumulé	g_i	Σg_o	kN	0,3405	0,2264	0,0000	Somme
composantes de T_i	T_x	$(T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i$	kN	− 0,6640	0,0000	0,2531	−0,4109
"	T_y	$-(T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$	kN	0,0000	−0,9984	0,0000	−0,9984
moment de T_i	C	$-b_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i - a_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$	kNm	0,7134	1,0925	0,4368	2,2427
paramètres droite Δ_1	u_1	T_y / C	m^{-1}	− 0,4452			
"	v_1	$-T_x / C$	m^{-1}	0,1832			
abscisse à l'origine/G		$1 / u$	m	− 2,2462			
ordonnée à l'origine/G		$1 / v$	m	5,4579			

Pour V = 1 parallèle à O_x

		Formule		1	2	3	
effort par élément	T_i	$-t(ah^2/2 - h^3 \sin\varphi / 12) / I_y$		− 0,9728	0,3643	0,0707	
glissement par élément	g_o	tah / I_y		0,2835	− 0,2602	− 0,0233	
glissement cumulé	g_i	Σg_o		0,2835	0,0233	0,0000	Somme
composantes de T_i	T_x	$(T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i$		− 0,9728	0,0000	− 0,0264	−0,9992
"	T_y	$-(T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$		0,0000	− 0,4295	0,0000	−0,4295
moment de T_i	C	$-b_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \sin \varphi_i - a_i (T_i - g_{i-1}\, h_i) \cos \varphi_i$		1,0452	0,4700	− 0,0456	1,4695
paramètres droite Δ_2	u_2	T_y / C	m^{-1}	− 0,2923			
"	v_2	$-T_x / C$	m^{-1}	0,6800			
abscisse à l'origine/G		$1 / u$	m	− 3,4213			
ordonnée à l'origine/G		$1 / v$	m	1,4706			

Coordonnées de C	x_C	$(v_1 - v_2) / (u_2 v_1 - u_1 v_2)$	m	− 1,994
par rapport à Gxy	y_C	$(u_2 - u_1) / (u_2 v_1 - u_1 v_2)$	m	0,614

Coordonnées de C	x_C	$x_C + x_G$	m	− 0,899
par rapport à OXY	y_C	$y_C + y_G$	m	− 0,461

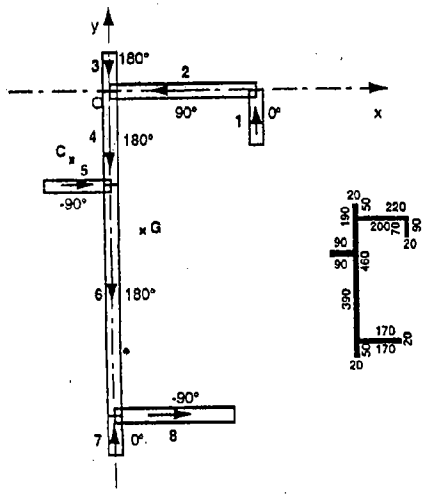
Remarques

1. On notera que T_y dans le premier cas et T_x dans le deuxième ne sont pas tout à fait égaux à –V. Cela est dû au fait que l'on a modélisé le voile en une succession de rectangles liés au milieu de leurs petites faces, car c'est en ce point que se transmet la résultante de glissement *g*.

2. Pour V parallèle à O*x*, on constate que l'effort repris par la plus grande des deux âmes est de 0,9727 V contre 0,0265 V pour la petite, soit 3 % pour cette dernière, alors qu'elle représente 33 % de l'aire totale des deux âmes. On peut dire que la quasi-totalité de l'effort passe par la plus grande des âmes.

3. La demi-courbe supérieure représente le lieu du centre de torsion C lorsque, pour une même hauteur de l'âme de 2,80 m et une même longueur de l'aile supérieure de 3,90 m, la longueur de l'aile inférieure varie de 3,90 m à gauche de l'âme à 3,90 m de longueur à droite de l'âme. On reconnaît le point situé sur l'âme, à mi-hauteur, pour le voile en Z (longueur 3,90 m à gauche de l'âme) et le point situé en O pour une aile inférieure de longueur nulle, ainsi que le point correspondant au U symétrique situé le plus à gauche (abscisse de –1,74 m).

3.3. ÉTUDE D'UN VOILE COMPOSÉ OUVERT QUELCONQUE



Un voile composé quelconque peut être décomposé en des rectangles. Pour l'étude d'un rectangle donné, il suffit de considérer les rectangles amont.

On calcule comme indiqué ci-dessus et pour chacune des deux valeurs V_y (parallèle à O*y*) et V_x (parallèle à O*x*) dans un repère orthonormé quelconque, les valeurs g_0, g_t, T_t. Pour le calcul de T_x, T_y et C, on prendra les rectangles amont comme indiqué dans le tableau suivant en partant des deux extrémités.

On peut trouver une analogie avec un fleuve ayant une source (l'origine du premier rectangle), des affluents et une embouchure (l'extrémité du dernier rectangle).

Fig. 13 – Voile quelconque ouvert - Cotes hors tout sur le petit schéma.

Rectangle étudié	Rectangles amont
1	-
2	1
3	-
4	2 + 3
5	-
6	4 + 5
7	-
8	6 + 7

(Voir tableaux en pages 1312 et 1313).

3.4. LARGEUR EFFICACE DES AILES

Considérons un voile fléchi dont une aile est comprimée et l'autre tendue (Fig. 14).

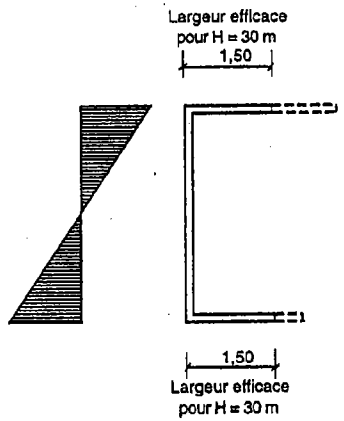


Fig. 14 – Largeur efficace des ailes.

L'effort de compression de l'aile est transmis progressivement à partir du point de jonction avec l'âme, puis se diffuse dans le reste de l'aile avec un certain décalage (« traînage de cisaillement », [11]).

La largeur efficace de l'aile des poutres en Té est donnée par les règles BAEL : le débord à prendre en compte est égal au 1/10 de la longueur de la travée (il en est de même pour l'Eurocode 2). On peut admettre cette même règle pour les voiles de contreventement ; la largeur efficace de chaque aile est égale au 1/20 de la hauteur totale H du voile, qui est considéré comme une console encastrée à sa base.

Caractéristiques des voiles

	Notations	Unité	1	2	3	4	5	6	7	8
épaisseur	t_i	*m*	*0,2*	*0,2*	*0,2*	*0,2*	*0,2*	*0,2*	*0,2*	*0,2*
longueur	h_i	*m*	*0,8*	*2,2*	*0,6*	*1,4*	*1*	*3,4*	*0,6*	*1,8*
orientation	φ_i	°	0	90	180	180	− 90	180	0	− 90
"	φ_i	rd	0,000	1,571	3,142	3,142	− 1,571	3,142	0	− 1,571
absc. cdg	a_i	*m*	2,200	1,100	0,000	0,000	− 0,500	0,000	0,000	0,900
ord. cdg	b_i	*m*	− 0,400	0,000	0,300	− 0,700	− 1,400	− 3,100	− 5,100	− 4,800

Coordonnées du centre de gravité : $x_G = 0{,}4492$ m et $y_G = -2{,}0983$ m
Moments d'inerties par rapport aux axes parallèles au repère *Oxy* et passant par G : $I_x = 8{,}8451$ m^4 et $I_y = 1{,}4682$ m^4

Pour V = 1 parallèle à Oy

		Formule	Unité	1	2	3	4	5	6	7	8	
effort par élément	T_i	$-tbh^2/2 - h^3 \cos\varphi/12)/I_x$	kN	− 0,011	− 0,115	− 0,010	− 0,036	− 0,008	0,057	0,013	0,099	
glissement par élément	g_o	tbh / I_x	kN	0,031	0,104	0,033	0,044	0,016	− 0,077	− 0,041	− 0,110	
glissement cumulé	g_i	Σg_o	kN	0,031	0,135	0,033	0,212	0,016	0,151	− 0,041	0,000	Somme
		$T_i - g_{i-1} h_i$	kN	− 0,011	− 0,182	− 0,010	− 0,271	− 0,008	− 0,717	0,013	− 0,009	
composantes de T_i	T_x	$(T_i - g_{i-1} h_i) \sin\varphi_i$	kN	0,000	− 0,182	0,000	0,000	0,008	0,000	0,000	0,099	− 0,076
"	T_y	$-(T_i - g_{i-1} h_i) \cos\varphi_i$	kN	0,011	0,000	− 0,010	− 0,271	0,000	− 0,717	− 0,013	0,000	− 1,000
moment de T_i	C	$-b_i (T_i - g_{i-1} h_i) \sin\varphi_i$	kNm	0,020	0,383	0,005	0,122	− 0,006	0,322	0,006	0,267	1,118
		$- a_i (T_i - g_{i-1} h_i) \cos\varphi_i$										
paramètres droite 1	u_1	T_y / C	m^{-1}	− 0,894								
"	v_1	$-T_x / C$	m^{-1}	0,068								
abscisse à l'origine/G		$1 / u_1$	m	− 1,119								
ordonnée à l'origine/G		$1 / v_1$	m	14,806								

Pour V = 1 parallèle à Oy

		Formule		1	2	3	4	5	6	7	8	
effort par élément	T_i	$-t (ah^2/2 + h^3 \sin\varphi/12) / I_y$	kN	− 0,076	− 0,335	0,011	0,060	0,076	0,354	0,011	− 0,033	
glissement par élément	g_o	tah / I_y	kN	0,191	0,195	− 0,037	− 0,086	− 0,129	− 0,208	− 0,037	0,111	
glissement cumulé	g_i	Σg_o	kN	0,191	0,3859	− 0,037	0,2635	− 0,129	− 0,074	− 0,037	0,0000	Somme
		$T_i - g_{i-1} h_i$	kN	− 0,076	− 0,7552	0,0110	− 0,4288	0,076	− 0,103	0,0110	0,1657	
composantes de T_i	T_x	$(T_i - g_{i-1} h_i) \sin\varphi_i$	kN	0,000	− 0,755	0,000	0,000	− 0,076	0,000	0,000	− 0,166	− 0,997
"	T_y	$-(T_i - g_{i-1} h_i) \cos\varphi_i$	kN	0,076	0,000	0,011	− 0,429	0,000	− 0,103	− 0,011	0,000	− 0,455
moment de T_i	C	$-b_i (T_i - g_{i-1} h_i) \sin\varphi_i$	kNm	0,134	1,585	− 0,005	0,193	0,053	0,046	0,005	− 0,448	1,562
		$- a_i (T_i - g_{i-1} h_i) \cos\varphi_i$										
paramètres droite 2	u_2	T_y / C	m^{-1}	− 0,291								
"	v_2	$-T_x / C$	m^{-1}	0,6381								
abscisse à l'origine/G		$1 / u_2$	m	− 3,4329								
ordonnée à l'origine/G		$1 / v_2$	m	1,567								

Coordonnées de C	x_C	$(v_1 - v_2) / (u_2 v_1 - u_1 v_2)$	m	− 1,036
par rapport à *Gxy*	y_C	$(u_2 - u_1) / (u_2 v_1 - u_1 v_2)$	m	1,094

Coordonnées de C	x_C	$x_C + x_G$	m	− 0,587
par rapport à OXY	y_C	$y_C + y_G$	m	− 1,004

Exemple. Pour V = 1 parallèle à *Oy*, on a :

$g_4 = g_{o4} + g_3 + g_2 = 0{,}044 + 0{,}033 + 0{,}135 = 0{,}212$
$T_4 - (g_3 + g_2)\, h^4 = -0{,}036 - (0{,}033 + 0{,}135) \times 1{,}40 = -0{,}271$

On peut alors considérer que la contrainte de compression d'une aile comprimée (ou de traction d'une aile tendue) est constante sur toute la largeur efficace. On satisfait ainsi l'hypothèse sur la contrainte de l'aile faite en 3.1 et 3.2 ci-dessus. Ce qui nous fait considérer que les efforts résistants d'un voile composé passent par son centre de torsion.

Il faudra naturellement vérifier les conditions de non-flambement des ailes et des âmes suivant les dispositions réglementaires (voir chapitre 10, §. 4).

3.5. EFFET D'UN DÉPLACEMENT IMPOSÉ DANS UNE DIRECTION AUTRE QUE CELLES DES AXES PRINCIPAUX D'INERTIE

Pour une déformation imposée suivant l'axe Oy (Fig. 15), on a une flexion avec contraintes et déformations linéaires, car une section plane reste plane après déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli), et les contraintes sont proportionnelles aux déformations (loi de Hooke).

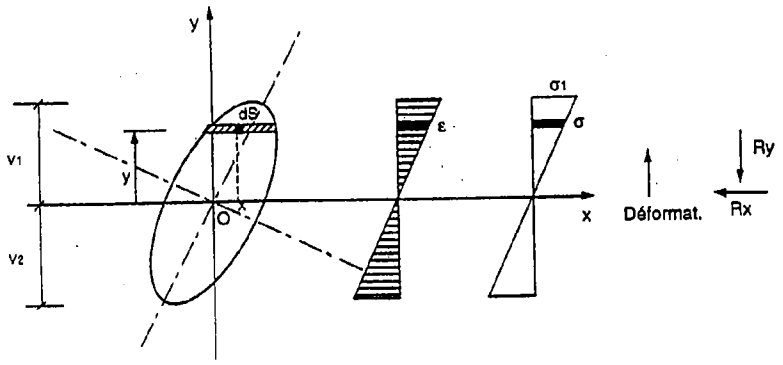


Fig. 15 – Déplacement imposé dans une direction autre que celles des axes principaux.

La contrainte à l'ordonnée y s'écrit : $\sigma = \frac{y}{v_1}\,\sigma_1$.

L'effort normal vaut : $F_x = \iint \sigma\, dS = \iint \frac{\sigma_1}{v_1}\, y\, dS$

et le moment par rapport à Ox : $M_x = \iint y\, dF_x = \iint y\,\sigma\, dS = \iint \frac{\sigma_1}{v_1}\, y^2\, dS = \frac{\sigma_1}{v_1}\, I_x$

de même pour $M_y = \iint x\, dF_x = \iint \frac{\sigma_1}{v_1}\, x\, y\, dS = \frac{\sigma_1}{v_1}\, I_{xy}$.

Ainsi, un déplacement imposé selon un axe Oy, autre qu'un axe principal d'inertie, entraîne des moments résistants :

$$M_x = \frac{\sigma_1}{v_1}\, I_x \quad \text{et} \quad M_y = \frac{\sigma_1}{v_1}\, I_{xy}.$$

Or, comme l'on a proportionnalité entre l'effort extérieur appliqué au voile et le moment, on obtient, pour un déplacement unité positif suivant Oy, une réaction proportionnelle à l'inertie I_x suivant l'axe Oy et à l'inertie I_{xy} suivant l'axe Ox.

De même pour un déplacement imposé unité suivant Ox, on obtient une réaction proportionnelle à I_y suivant l'axe Ox et une réaction proportionnelle à I_{xy} suivant l'axe Oy.

4. INERTIE ÉQUIVALENTE

4.1. VOILE SIMPLE

Un voile de section rectangulaire se comporte comme une console verticale (Fig. 16), de longueur H, encastrée en pied dans ses fondations et soumise à des charges réparties ou concentrées à chaque plancher.

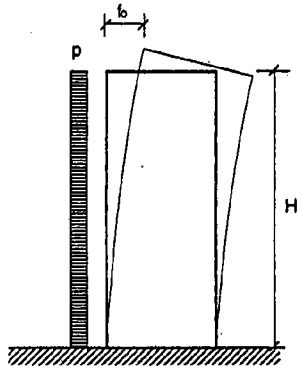


Fig. 16 – Voile-console.

Pour un grand nombre d'étages, on peut assimiler ces charges concentrées à une charge répartie. Si la pression du vent est uniforme et si la section du voile est constante sur toute la hauteur, on a une déformée à la cote z qui vaut (chapitre 2, cas 26) :

$$f = \frac{p}{EI}\left[\frac{Hz^3}{6} - \frac{H^2z^2}{4} - \frac{z^4}{24}\right] \qquad (30)$$

Ainsi, les flèches aux cotes 0,5 H ; 0,8 H et H valent respectivement en valeur relative 0,354 ; 0,734 et 1 fois la flèche maximale f_o.

4.2. *PORTIQUE AVEC TRAVERSES INFINIMENT RIGIDES* (Fig. 17)

On peut admettre que les inerties des montants sont les mêmes et que l'effort de vent est à répartir au prorata des inerties des montants. On a ainsi, pour le premier poteau et au dernier niveau, une articulation à mi-hauteur.

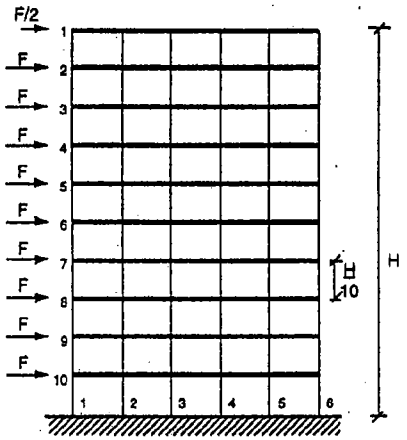


Fig. 17 – Portiques à traverses infiniment rigides.

La déformée δ_1 vaut (chapitre 2, cas 1 et 32) (Fig. 18) : $\delta_1 = 2\,\frac{F}{12}\,\frac{(H/20)^4}{3EI}$

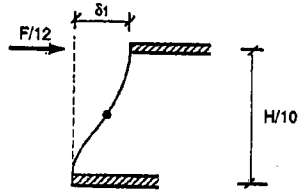


Fig. 18 – Dernier niveau.

Pour l'avant-dernier niveau (Fig. 19) : $\delta_2 = 2\,\frac{3F}{12}\,\frac{(H/20)^4}{3EI} = 3\,\delta_1$.

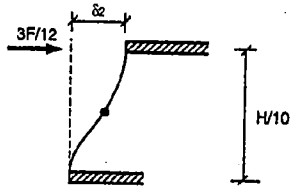


Fig. 19 – Avant-dernier niveau.

De même pour les niveaux suivants :
$\delta_3 = 5\,\delta_1$; $\delta_4 = 7\,\delta_1$; $\delta_5 = 9\,\delta_1$; $\delta_6 = 11\,\delta_1$; $\delta_7 = 13\,\delta_1$; $\delta_8 = 15\,\delta_1$; $\delta_9 = 17\,\delta_1$ et $\delta_{10} = 19\,\delta_1$.

La déformée totale vaut $\delta_o = \sum \delta_i = 100\,\delta_1$ pour 10 niveaux et $\delta_o = n^2\,\delta_1$ pour n niveaux.

L'allure de la déformée est indiquée sur la figure 20, soit 0,75 δ_o à mi-hauteur et 0,96 δ_o à la cote 0,8 H.

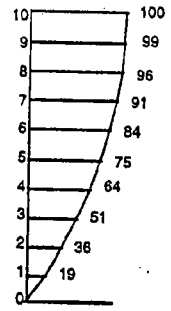


Fig. 20 – Déformée d'un portique à traverses infiniment rigides.

Pour une même flèche au sommet ou pour une même flèche à la cote 0,8 H, nous pouvons comparer l'allure des déformées pour le cas de la console et le cas du portique à traverses infiniment rigides.

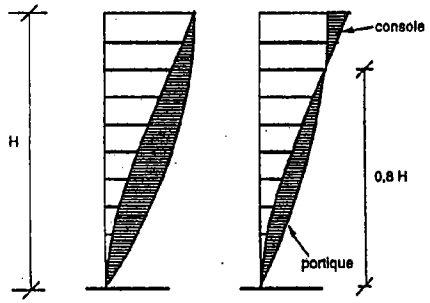


Fig. 21 – Comparaison des déformées pour une même déformée en tête ou à la cote 0,8 H.

Sur la figure 21, on constate qu'admettre une même flèche à la cote z = 0,8 H réduit les flèches différentielles pour deux éléments de contreventement d'un même bâtiment, l'un étant un voile-console plein et l'autre un portique à traverse de très grandes inerties.

On sait calculer facilement la flèche d'un voile-console sans ouvertures, plus difficilement celle d'un portique ou d'un voile-console avec ouvertures. Il est intéressant de définir une *inertie équivalente* qui donne la même flèche à une cote donnée ou, mieux, qui minimise les efforts dans les planchers, efforts dus au fait que les déformées des différents éléments de contreventement n'ont pas la même allure.

Ce qui revient à rechercher la cote z telle que la somme des produits flèche-efforts soit minimum.

Ainsi, pour une même flèche à la cote 0,7 H, on trouve les flèches relatives, différence de flèche Δf, effort cumulé de vent F et le produit $F\,\Delta f$:

Niveau	Flèche relative *f* portique	voile	Effort total F	Δf	$\Delta f \times F$
10	1,099	1,658	0,050	– 0,559	0,028
9	1,088	1,438	0,150	– 0,350	0,052
8	1,055	1,217	0,250	– 0,162	0,041
7	1,000	1,000	0,350	0,000	0,000
6	0,923	0,788	0,450	0,135	0,061
5	0,824	0,587	0,550	0,237	0,130
4	0,703	0,403	0,650	0,300	0,195
3	0,560	0,244	0,750	0,317	0,237
2	0,396	0,116	0,850	0,280	0,238
1	0,209	0,032	0,950	0,177	0,168
0	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
				Total =	1,151

Si on procède de même pour différentes cotes, on trouve un minimum de la somme $\sum F_i \times \Delta f_i$ pour la cote 0,7 H :

Même flèche à la cote :	1,0 H	0,9 H	0,8 H	0,7 H	0,6 H	0,5 H
$\Sigma F_i \times \Delta f_i$	1,504	1,343	1,217	1,151	1,192	1,450

Pour les *portiques*, on peut admettre que *l'inertie équivalente* est celle d'un voile plein donnant la même flèche à une cote comprise entre 0,7 H et 0,8 H : 0,7 H pour des grandes inerties des traverses par rapport aux poteaux et 0,8 H pour le cas inverse.

Pour des *voiles avec ouvertures*, plus les ouvertures sont petites, plus on se rapproche de la cote 1,0 H ; on pourra retenir la cote 0,8 H pour les voiles à grandes ouvertures, la cote 0,9 H pour les voiles à ouvertures moyennes et la cote H pour les voiles à petites ouvertures (voir en 6 ci-après).

Il est rappelé que la déformée d'un voile plein de section rectangulaire, à la cote z, est donnée par :

$$f = \frac{p}{EI}\left[\frac{Hz^3}{6} - \frac{H^2z^2}{4} - \frac{z^4}{24}\right] \qquad (30)$$

d'où la valeur de l'inertie équivalente I si l'on connaît la déformée f à la cote définie ci-dessus (0,7 H à 0,9 H suivant les cas).

On verra ci-après (en 6.2.8), comment calculer la déformée d'un voile avec une ou plusieurs files d'ouvertures.

Remarque
Pour des voiles à *n* files d'ouvertures, V. Guillot recommande [3] de prendre l'altitude 0,8 H quel que soit le type d'ouvertures (grandes, moyennes ou petites).

EXEMPLE

Supposons qu'un élément de contreventement constitué d'un voile à grandes ouvertures (voir en 6 ci-après) reprend une charge de vent horizontale p = 7,64 kN/m et que la déformée à la cote 0,8 H, avec H = 39 m, est f = 0,032 m. Le module d'Young est pris égal à 30 000 MPa (charges de courte durée).
D'après (30), la flèche à la cote relative 0,8 H est telle que :

$$\frac{f E I_{éq}}{p H^4} = -\left[\frac{(0,8)^3}{6} - \frac{(0,8)^2}{4} - \frac{(0,8)^4}{24}\right] = 0,09173$$ d'où l'inertie équivalente :

$$I_{éq} = 0,09173\,\frac{pH4}{fE} = 0,09173\,\frac{0,00764 \times 39^4}{0,032 \times 30\,000} = 1,689\ \text{m}^4.$$

4.3. CAS PARTICULIER - VOILE SUR POTEAUX AU PREMIER NIVEAU

Au niveau des poteaux du premier niveau, si l'on néglige leur inertie par rapport aux voiles, l'action du vent se traduit par (Fig. 22) :

– un effort horizontal en tête W ;

– deux efforts verticaux concentrés – F et + F formant un couple tel que $F\,d = M_W$ où M_W représente le moment de renversement dû à la charge de vent p. L'effort W se répartit en W_1 et W_2 au prorata des inerties des poteaux.

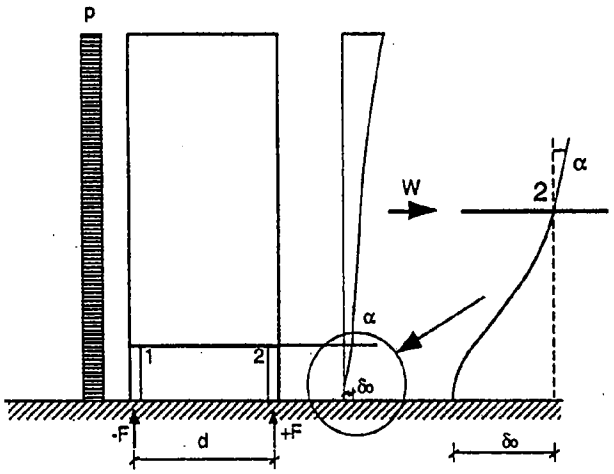


Fig. 22 – Voile sur poteaux au premier niveau.

La déformée d'un poteau s'en déduit et a l'allure de la figure 23. Si l'on néglige la flèche due à l'angle α (on montrera ci-après qu'elle est très faible), on peut écrire que la flèche δ_o est le double de la flèche d'une console de portée $h/2$:

$$\delta_o = 2\,\frac{W_1(h/2)^3}{3EI_1} = \frac{W_1 h^3}{12EI_1} = \frac{W_2 h^3}{12EI_2}$$

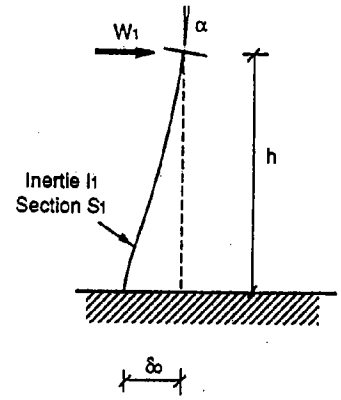


Fig. 23 – Déformée d'un poteau.

La rotation α est faible mais a une incidence sur la déformée du voile ; elle est due au raccourcissement du poteau 2 et à l'allongement du poteau 1 :

$$\alpha = \frac{\dfrac{Fh}{ES_1} + \dfrac{Fh}{ES_2}}{d} \quad \text{avec} \quad F = \frac{M_W}{d}$$

EXEMPLE

Le vent supposé constant vaut $p = 9{,}2$ kN/m.

Données	Unité	voile	poteau 1	poteau 2
hauteur	m	24,00	3,00	3,00
épaisseur	m	0,15	0,50	0,55
longueur	m	8,50	0,80	0,90
résistance béton	MPa	25	40	40
section	m^2	1,275	0,40	0,495
inertie	m^4	7,676	0,0213	0,0334
module d'Young	MPa	32 160	37 620	37 620

– Effort dû au vent à mi-hauteur des poteaux :

$$W = p\,H_1 = 9{,}2\,(24 + 3/2) = 234{,}6 \text{ kN} = 0{,}235 \text{ MN} ;$$

– Moment de renversement en pied :

$$M_W = p\,H^2 / 2 = 9{,}2 \times 27^2 / 2 = 3353 \text{ kNm} = 3{,}35 \text{ MNm} ;$$

– Effort normal dans le poteau : $F = \dfrac{M_W}{d}$

avec $d = 8{,}50 - \dfrac{0{,}8 + 0{,}9}{2} = 7{,}65$ m d'où $F = 0{,}438$ MN ;

– Répartition de l'effort W au prorata des inerties des poteaux :

$$W_1 = W \frac{I_1}{I_1 + I_2} = 0{,}235 \frac{0{,}0213}{0{,}0213 + 0{,}0334} = 0{,}0915 \text{ MN} ;$$

– Déformée maximale de flexion des poteaux :

$$\delta_o = \frac{W_1 h^3}{12 E I_1} = \frac{0{,}0915 \times 3^3 \times 10^3}{12 \times 37260 \times 0{,}0213} = 0{,}257 \text{ mm} ;$$

– Rotation en tête des poteaux :

$$\alpha = \frac{\dfrac{Fh}{ES_1} + \dfrac{Fh}{ES_2}}{d} = \frac{0{,}438 \times 3}{37620 \times 7{,}65}\left[\frac{1}{0{,}4} + \frac{1}{0{,}495}\right] = 20{,}6 \times 10^{-6} \text{rd.}$$

Vérifions que la flèche δ_α due à l'angle α est négligeable vis-à-vis de δ_o :

$$\delta_\alpha = \frac{\alpha h}{2} = \frac{20{,}6 \times 10^{-6} \times 3}{2} = 3 \times 10^{-5} , \quad \text{ce qui correspond à } \frac{\delta_o}{8\,300} .$$

La déformée du voile à chaque niveau est la somme de :
– la déformée d'un voile encastré en pied sous une charge répartie p :

$f_n = \dfrac{p}{EI}\left[\dfrac{H_n z^3}{6} - \dfrac{H_n^2 z^2}{4} - \dfrac{z^4}{24}\right]$ avec $H_n = 24$ m et z = cote de calcul à partir du pied du voile, $EI = 7{,}676 \times 32\,160 = 246\,860$;
– la déformée due à la rotation d'angle α en pied de voile : αz ;
– la déformée δ_o en pied.

Données	Unité	Valeur
p	kN/m	9,2
EI	MPa.m²	246 860
H_o	m	24
H	m	27

Hauteur au-dessus du niveau 0	z (m)	F (kN)	δ_o (mm)	αz (mm)	f_o (z) (mm)	f totale (mm)
27	24	13,8	0,257	0,494	1,546	0,297
24	21	41,4	0,257	0,433	1,288	1,978
21	18	69,0	0,257	0,371	1,032	1,660
18	15	96,6	0,257	0,309	0,783	1,349
15	12	124,2	0,257	0,247	0,547	1,052
12	9	151,8	0,257	0,185	0,336	0,779
9	6	179,4	0,257	0,124	0,163	0,544
6	3	207,0	0,257	0,062	0,044	0,363
3	0	234,6	0,257	0,000	0,000	0,257
0	0	248,4	0,000	0,000	0,000	0,000

Comparons les flèches relatives aux cotes 1,0 H, 0,9 H et 0,8 H avec celle d'un voile plein qui vaut :

$$\frac{-8}{H^4}\left[\frac{Hz^3}{6} - \frac{H^2 z^2}{4} - \frac{z^4}{24}\right]$$

z (m)	Même déformée au sommet			Même déformée à 0,9 H			Même déformée à 0,8 H		
	flèche relat.	fl. rel. voile plein	F × Δf	flèche relat.	fl. rel. voile plein	F × Δf	flèche relat.	fl. rel. voile plein	F × Δf
24	1,000	1,000	0,00	1,161	1,174	0,17	1,383	1,419	0,50
21	0,861	0,852	0,38	1,000	1,000	0,00	1,191	1,209	0,75
18	0,723	0,705	1,28	0,840	0,827	0,87	1,000	1,000	0,00
15	0,588	0,560	2,71	0,682	0,657	2,46	0,813	0,794	1,77
12	0,458	0,420	4,70	0,532	0,493	4,80	0,634	0,597	4,60
9	0,339	0,291	7,34	0,394	0,342	7,96	0,469	0,413	8,54
6	0,237	0,177	10,74	0,275	0,208	12,07	0,327	0,251	13,69
3	0,158	0,085	15,08	0,183	0,100	17,29	0,218	0,121	20,21
0	0,111	0,023	20,60	0,129	0,027	23,86	0,153	0,033	28,30
0	0,000	0,000	0,00	0,000	0,000	0,00	0,000	0,000	0,00
		Total =	62,82		Total =	69,48		Total =	78,37

On constate que l'optimum d'équivalence (minimisation des produits effort-déformation) est obtenu pour la cote H, d'où l'inertie équivalente $I_{éq}$:

$$\frac{fEI_{éq}}{pH^4} = -\left[\frac{(1)^3}{6} - \frac{(1)^2}{4} - \frac{(1)^4}{24}\right] = 0{,}125$$

$$I_{éq} = 0{,}125\,\frac{pH4}{fE} = 0{,}125\,\frac{0{,}0092 \times 27^4}{0{,}002297 \times 32160} = 8{,}273\ m^4$$

au lieu de 7,676 pour le voile plein. L'inertie équivalente est supérieure de 7,8 % à celle du voile plein. Ce résultat paradoxal s'explique par le fait :

- que le module d'Young des poteaux est plus élevé que celui du voile. Si les poteaux avaient le même module, on aurait au sommet une flèche de :

$$1{,}546 + \frac{37\,620}{32\,160}\,(0{,}257 + 0{,}494) = 2{,}425\ mm \quad \text{au lieu de } 2{,}297\ (+5.5\ \%)\ ;$$

- que le moment d'inertie des deux poteaux, dans leur ensemble, est voisin de $(S_1+S_2)(d/2)^2 = (0{,}4 + 0{,}495) \times (7{,}65/2)^2 = 13{,}09\ m^4$, valeur supérieure à celle du voile ($7{,}676\ m^4$).

4.4. VOILES COMPOSÉS

Comme on l'a vu en 3.4 ci-dessus, on peut considérer qu'un voile composé peut être pris avec son inertie globale, sous réserve de limiter la largeur des ailes à la largeur efficace. Ceci, d'autant plus qu'un voile composé est rarement le seul élément de contreventement.

Ainsi, tout déplacement du voile étudié perpendiculairement à l'effort est empêché, ou au moins très limité, par les autres éléments de contreventement existant dans l'autre direction.

Ceci veut dire que les déformations d'un élément du voile perpendiculaire à l'effort (une aile) résiste en tout point avec la même contrainte (car la même déformation), donc conformément aux hypothèses formulées lors de l'étude du centre de torsion. Il suffit d'introduire ce voile composé positionné en son centre de torsion avec son inertie globale.

4.5. PROGRAMME « INEQ » *

Détermination de l'inertie équivalente d'un voile à inerties variables par minimisation de la somme des produits « Effort de vent cumulé × variation de flèche ».

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées.

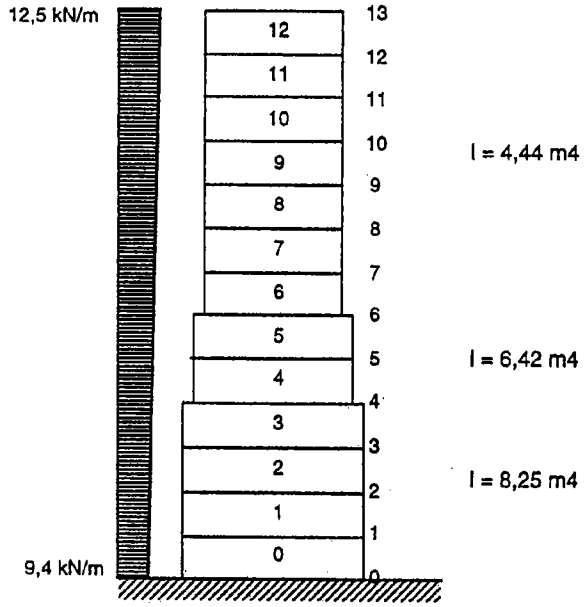
4.5.1. Données

Ligne 1 E, q_0 , q_1
E = module d'Young du béton du voile (MPa)
Pour un vent trapézoïdal :
q_0 = action du vent au pied du voile (kN/m)
q_1 = action du vent en tête du voile (kN/m)
(voir en 6.1 comment approximer un vent quelconque en vent trapézoïdal)

Ligne 2 *i, j, h,* I
Du niveau *i* au niveau *j*, hauteur d'étage *h* (m) et moment d'inertie I (m^4)
Retour ligne 2 ou Fin = 0,0,0,0
Les variables sont à séparer par une virgule.

Les moments d'inerties peuvent être calculés par le programme « INERTORS » ou par un premier passage du programme « CONTREV ».

4.5.2. Exemple



Données

10000	module d'Young
9.4	vent en pied en kN/m
12.5	vent en tête en kN/m
0,3,3.2,8.25	du niveau 0 au niveau 3 : h = 3.2 m et I = 8.25 m^4
4,5,3.2,6.42	du niveau 4 au niveau 5 : h = 3.2 m et I = 6.44 m^4
6,12,3.2,4.44	du niveau 6 au niveau 12 : h = 3.2 m et I = 4.44 m^4
0,0,0,0	FIN

Écran des données et résultats

```
INEQ
Voulez-Vous Entrer les Donnees au Clavier (=1), en DATA (=2)? 1
Module d'Young (MPa) =? 10000
Action du Vent en Pied (kN/m) =? 9.4
Action du vent en Tete (kN/m) =? 12.5
Commencer la Numerotation des Niveaux a 0
de i a j : h (m) et Inertie (m4)? 0,3,3.2,8.25
de i a j : h (m) et Inertie (m4)? 4,5,3.2,6.42
de i a j : h (m) et Inertie (m4)? 6,12,3.2,4.44
de i a j : h (m) et Inertie (m4)? 0,0,0,0

Repetition des Donnees
----------------------
Action du Vent en Tete = 12.500 kN/m
Action du Vent en Pied =  9.400 kN/m

Niv.   Hauteurs (m)    Inertie    Forces
No     Niv.   Cumule     m4         kN
13    0.000  41.600     4.4400    20.00
12    3.200  38.400     4.4400    39.24
11    3.200  35.200     4.4400    38.47
10    3.200  32.000     4.4400    37.71
 9    3.200  28.800     4.4400    36.95
 8    3.200  25.600     4.4400    36.18
 7    3.200  22.400     4.4400    35.42
 6    3.200  19.200     4.4400    34.66
 5    3.200  16.000     6.4200    33.90
 4    3.200  12.800     6.4200    33.13
 3    3.200   9.600     8.2500    32.37
 2    3.200   6.400     8.2500    31.61
 1    3.200   3.200     8.2500    30.84
 0    3.200   0.000     8.2500     0.00

Inertie Equivalente =  7.8442 m4, Niveau   8 Cote = 25.600 m
Fleche Maximum Reelle au Sommet =  59.154 mm
```


5. RÉPARTITION DE L'EFFORT EXTÉRIEUR SUIVANT LES DIFFÉRENTS ÉLÉMENTS DE CONTREVENTEMENT

Les résultats ci-après supposent que les inerties des voiles sont constantes sur toute leur hauteur ou bien qu'elles varient toutes aux mêmes niveaux et de la même quantité relative.

5.1. CONTREVENTEMENT PAR DEUX VOILES PLEINS PARALLÈLES (Fig. 24)

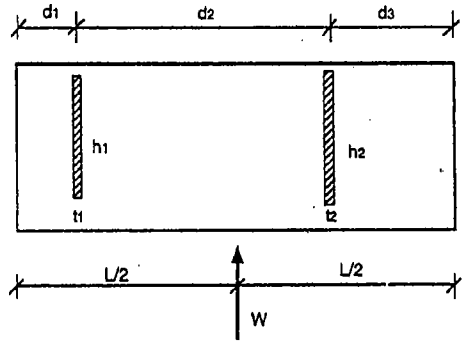


Fig. 24 – Contreventement par deux voiles parallèles.

Le déplacement de l'ensemble est constitué d'une translation et d'une rotation si la force extérieure W n'est pas appliquée à mi-distance des deux voiles. On peut négliger la rigidité à la torsion des voiles. On est alors en présence d'une poutre horizontale (le plancher) sur deux appuis élastiques (les deux voiles), soumise à une charge répartie uniforme de résultante W (Fig. 25).

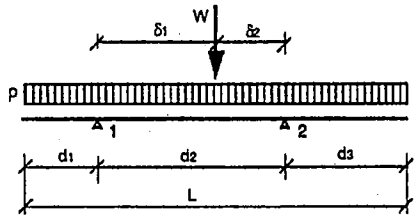


Fig. 25 – Poutre sur deux appuis.

Les réactions d'appui valent, avec $W = p\,L$:

$$R_1 = W\,\frac{d_1 + d_2 - d_3}{2d_2} \quad \text{ou bien} \quad W\,\frac{\delta_2}{d_2} \tag{31}$$

$$R_2 = W\,\frac{d_3 + d_2 - d_1}{2d_2} \quad \text{ou bien} \quad W\,\frac{\delta_1}{d_2} \tag{32}$$

EXEMPLE (Fig. 26)

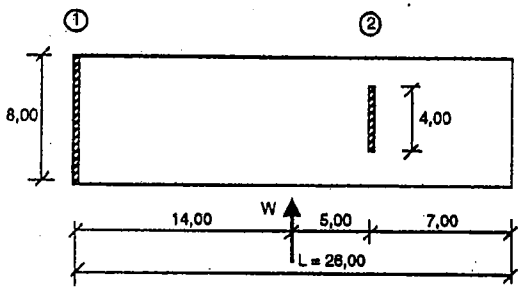


Fig. 26 – Exemple de contreventement par deux voiles parallèles.

$$R_1 = W\,\frac{19 - 7}{2 \times 19} = 0{,}3158\,W$$

$$R_2 = W\,\frac{19 + 7}{2 \times 19} = 0{,}6842\,W$$

On remarque que le plus petit voile reprend les deux tiers de l'effort total. Il eût mieux valu avoir un voile de grande inertie à 5 m du milieu du bâtiment et de petite inertie en pignon. On constate en général, que pour des raisons de distribution intérieure, les voiles de grande inertie sont en pignon. Dans ce cas, il faut essayer d'équilibrer les deux pignons par des voiles d'inerties comparables.

Le plancher travaille comme une poutre horizontale. Soient $p = 0{,}9$ kN/m² la pression du vent au niveau j et $H_j = 3$ m la hauteur d'étage. La force reprise par le plancher du niveau j vaut :

$$p\,\frac{H_j + H_{j+1}}{2} = 0{,}9\,\frac{3 + 3}{2} = 2{,}7 \text{ kN/m.}$$

L'effort tranchant sur la poutre horizontale à l'allure de la figure 27.

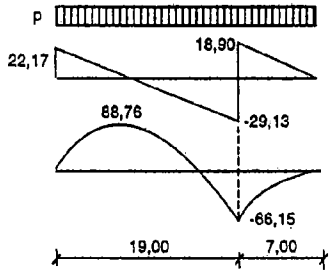


Fig. 27 – Effort tranchant et moment dans le plancher.

La force totale vaut 2,7 × 26 m = 70,2 kN, soit 22,17 kN pour le voile de pignon et 48,03 kN pour le voile intérieur.

Le moment sur appui vaut : $-2{,}7\,\frac{7^2}{2} = -66{,}15$ kNm

et en travée : $2{,}7\,\frac{19^2}{8} - 66{,}15 / 2 = 88{,}76$ kNm.

L'effort tranchant maximal vaut 29,13 kN et le moment maximal 88,76 kNm.

Ces sollicitations sont faibles, ainsi pour un moment de 88,76 kNm et un plancher de 8,00 m de « hauteur », 0,12 m d'épaisseur : $\beta = \frac{M}{bd^2} = \frac{0{,}08876}{0{,}1 \times (0{,}9 \times 8)^2} = 0{,}0143 < 3$ MPa, mais il ne faut pas oublier de disposer des armatures de flexion située prés des bords extérieurs et dont la section vaut en ELU :

$A_s = \frac{1{,}8\,M}{z\sigma_s} \approx \frac{1{,}8 \times 0{,}08876 \times 1{,}15}{(0{,}8 \times 8) \times 500} = 0{,}58$ cm² (avec un coefficient 1,8 pour le vent en ELU).

5.2. CONTREVENTEMENT PAR DEUX VOILES DONT UN EN U SYMÉTRIQUE

On a vu en 3 ci-dessus qu'un voile en U se comporte comme un voile plein de même inertie et sans torsion si l'effort est appliqué au centre de torsion C tel que (Fig. 28) :

$$\delta = \frac{h_2^2\,h_1^2\,t_1}{4\,I} \tag{33}$$

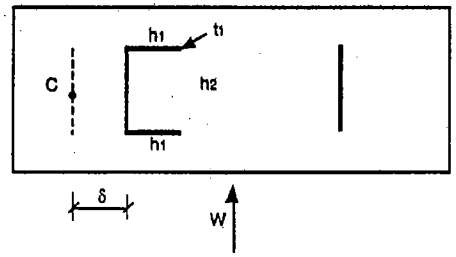


Fig. 28 – Deux voiles dont un en U symétrique.

On est alors ramené au cas précédent en remplaçant le voile en U par un voile simple de même inertie et axé au centre de torsion du voile en U. On peut négliger la résistance à la torsion qui réduit légèrement les efforts repris par les voiles (sauf pour le cas isostatique de deux voiles comme ici).

Remarque

Le moment résistant à la torsion du voile en U vaut : $C_t = \dfrac{R_1\, h_2^2\, h_1^2\, t_1}{4\, I}$ pour une force R_1 (fraction de W) reprise par ce voile. Il ne change pas la répartition de l'effort W sur les deux voiles, mais diminue seulement la rotation d'ensemble (dans le cas de deux voiles seulement).

EXEMPLE (Fig. 29)

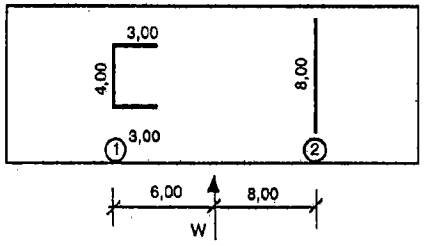


Fig. 29 – Exemple de deux voiles dont un en U symétrique.

Épaisseur des voiles : 0,20 m
Moment d'inertie du voile en U par différence de deux rectangles :

$$I = 3 \times \frac{4^3}{12} - 2{,}8 \times \frac{3{,}6^3}{12} = 5{,}1136 \text{ m}^4$$

Centre de torsion du voile U :

$$\delta = \frac{4^2 \times 3^2 \times 0{,}2}{4 \times 5{,}1136} = 1{,}408 \text{ m}$$

D'où : $R_1 = \dfrac{8}{8 + 6 + 1{,}408}\, W = 0{,}519\, W$ et $R_2 = W - R_1 = 0{,}481\, W$.

Remarque

En positionnant le U en son centre de gravité au lieu de son centre de torsion, on aurait :

$$R_1 = \frac{8}{8 + 6}\, W = 0{,}571\, W$$ valeur légèrement différente (10 %).

5.3. CONTREVENTEMENT PAR n VOILES D'AXES PRINCIPAUX D'INERTIES PARALLÈLES

Soient *n* voiles parallèles d'inertie I_i par rapport à leur axe principal d'inertie passant par leur centre de gravité et parallèle à G*x* (Fig. 30). Chaque voile a son axe situé à l'abscisse x_i par rapport à un repère G*xy*. Nous démontrerons ci-après que le point G représente le centre de gravité des inerties.

Soit x_v l'abscisse de la force extérieure W.

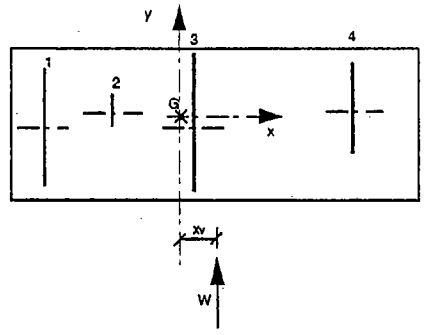


Fig. 30 – Contreventement par n voiles parallèles.

Pour un effort W parallèle à G*y*, le déplacement du plancher en un point donné peut se décomposer en une translation δ parallèle à G*y* et une rotation ω autour du point G [1].

5.3.1. Effort F_i repris par chaque voile à la cote z dans le cas d'une translation δ

Pour une console soumise à des charges concentrées (que l'on peut assimiler à une charge répartie pour un grand nombre de niveaux), la flèche δ à la cote z, pour une hauteur totale H, est proportionnelle (chapitre 2, cas 25 et 26) à $\frac{F_i}{I_i}$. On a donc pour une même flèche à un même niveau : $\frac{F_1}{I_1} = \frac{F_2}{I_2} = \frac{F_3}{I_3} = \frac{\sum F_i}{\sum I_i} = \frac{W}{\sum I_i}$ d'où $F_i = \frac{I_i}{\sum I_i}$.

La répartition de l'effort total se fait donc au prorata des inerties.

5.3.2. Recherche du point G

Soient :
- x_i les abscisses des voiles par rapport au point G (Fig. 31) ;
- F'_i les efforts repris par chacun des voiles sous l'effet de la seule rotation.

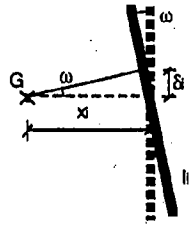


Fig. 31 – Rotation.

La flèche peut s'exprimer sous la forme : $\delta_i = \frac{F_i}{I_i} k(z)$

où $k(z)$ est une fonction permettant de déterminer la flèche et ne dépendant que de la cote z. La flèche d'une console est proportionnelle à l'effort appliqué F'_i et inversement proportionnelle au moment d'inertie I_i.

On a la rotation $\omega = \frac{\text{flèche}}{\text{distance à G}} = \frac{\delta_i}{x_i} = \frac{F'_i k(z)}{I_i x_i}$

d'où l'on peut tirer $F'_i = \frac{\omega}{k(z)} I_i x_i$.

La somme des forces F'_i doit être nulle pour ne provoquer qu'une rotation sans translation, cette dernière ayant été étudiée ci-dessus.

La rotation étant la même pour tous les voiles, on a :

$$\frac{\omega}{k(z)} = \frac{F'_1}{I_1 x_1} = \frac{F'_2}{I_2 x_2} = \frac{F'_3}{I_3 x_3} = \frac{F'_i}{I_i x_i} = \ldots = \frac{\sum F'_i}{\sum I_i x_i} = \frac{0}{\sum I_i x_i}$$

d'où $\sum I_i x_i = 0$.

Le point G cherché est le centre de gravité des inerties.

Remarque
Dans le cas d'un voile composé, il faut prendre comme centre du voile, son centre de torsion. De plus, on négligera la résistance à la torsion due aux ailes, ce qui va dans le sens de la sécurité pour la détermination des efforts dans les voiles parallèlement à Oy.

5.3.3. Efforts repris par chaque voile

Pour une abscisse x_v de la force de vent extérieur W par rapport au repère choisi Gxy, le moment extérieur vaut : $M_v = \sum F_i x_i = \sum \frac{\omega}{k(z)} I_i x_i^2$

d'où $\frac{\omega}{k(z)} = \frac{M_v}{\sum I_i x_i^2}$ et $F'_i = \frac{\omega}{k(z)} I_i x_i = M_v \frac{I_i x_i}{\sum I_i x_i^2}$.

Pour l'ensemble translation + rotation, l'effort repris par chaque voile vaut alors :

$$F_i = W I_i \left[\frac{1}{\sum I_i} + \frac{x_i x_v}{\sum I_i x_i^2} \right] \qquad (34)$$

EXEMPLE (Fig. 32)

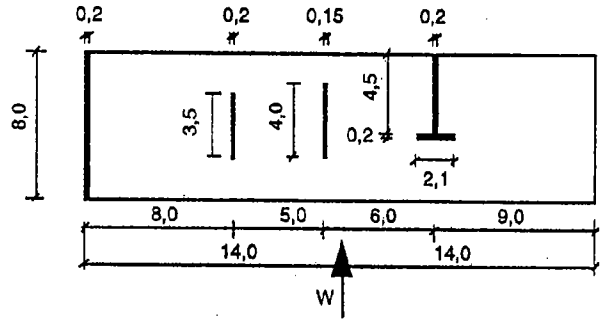


Fig. 32 – Exemple de voiles parallèles.

• *Inerties et centre de gravité G*

Voile	Epaisseur t (m)	Longueur h (m)	Inertie I_i (m^4)	d_i (m)	$I_i d_i$ (m^5)
1	0,2	8,0	8,5333	0,10	0,8533
2	0,2	3,5	0,7146	8,00	5,7168
3	0,15	4,0	0,8000	13,00	10,4000
4	0,2	4,5	2,7551	19,00	52,3469
Total		$\sum I_i =$	12,8031	$\sum I_i d_i =$	69,3170

Remarque

Le voile en Té a son centre de torsion au croisement des deux voiles simples le composant, donc à la même abscisse que son centre de gravité (19,00 m à partir du bord gauche).

Le centre de gravité G des inerties est situé à $d_G = \dfrac{69,317}{12,8031} = 5,414$ m du bord gauche.

Les abscisses de calcul sont à prendre par rapport à G, soit pour l'effort W :

$x_v = 14,00 - 5,414 = 8,586$ m.

Voile	d_i (m)	Inertie (m^4)	$x_i = d_i - d_G$ (m)	$I_i x_i^2$	$\dfrac{x_i x_v}{\sum I_i x_i^2}$	$\dfrac{F_i}{F}$
1	0,10	8,533	– 5,314	240,99	– 0,7933	– 0,1268
2	8,00	0,715	2,586	4,78	0,0323	0,0881
3	13,00	0,800	7,586	46,03	0,1062	0,1686
4	19,00	2,7551	13,586	508,51	0,6548	0,8700
Total		12,8031		800,31	0,000	1,0000

Ainsi, le voile de pignon, du fait de sa grande excentricité, reprend un effort en sens inverse de l'effort extérieur. On voit le peu d'intérêt d'avoir des voiles excentrés, aussi grande que soit leur inertie. On remarque également que le voile en Té, avec 22 % des inerties, reprend 87 % de l'effort.

5.4. MÉTHODE DU CENTRE DE TORSION

Il n'est pas rare d'avoir des voiles de contreventement irréguliers : voiles composés de forme complexe, orientations non perpendiculaires aux façades, elles-mêmes non orthogonales, ...

Il est proposé deux méthodes :
- la méthode du centre de torsion ;
- la méthode de la rigidité.

La méthode du centre de torsion [9] [2] consiste à décomposer l'action extérieure en :
- un effort H passant par le centre de torsion C de l'ensemble des éléments de contreventement et provoquant une *translation sans rotation* ;
- un moment $M = H.e$ de l'effort extérieur H par rapport au centre de torsion et provoquant une *rotation sans translation.*

5.4.1. Détermination du centre de torsion C d'un voile ou d'un ensemble de voiles de contreventement

Pour un voile ou un ensemble de voiles (au sens du paragraphe 1 ci-dessus et du chapitre 10) assurant le contreventement d'une structure et liés par des planchers rigides, le centre de torsion C est un point tel que :
- toute force passant par ce point provoque une translation du plancher et donc de l'ensemble des éléments de contreventement parallèlement à la force et sans rotation ;
- tout moment autour de ce point provoque une rotation du plancher dans le même sens que le moment et sans translation.

5.4.2. Eléments de définition d'un voile (Fig. 33)

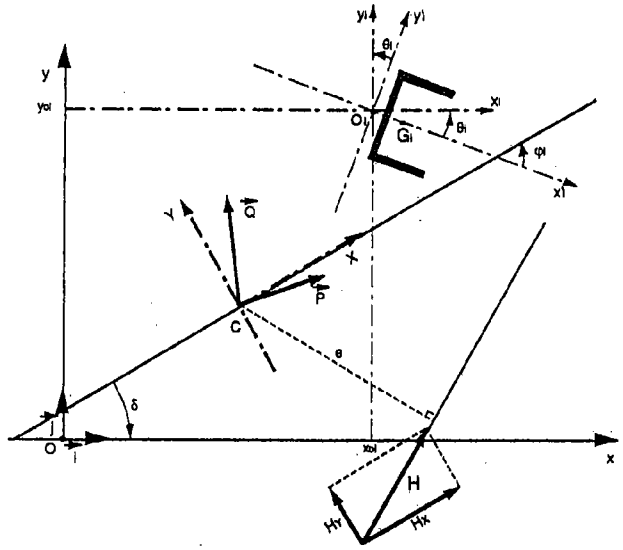


Fig. 33 – Eléments de définition d'un voile.

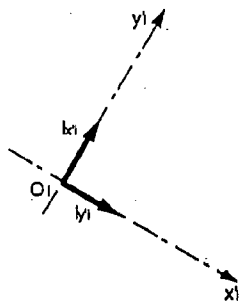


Fig. 34 – Convention vectorielle des inerties.

Chaque voile i est défini par :
- son centre de torsion O_i ;
- ses axes principaux d'inertie par rapport à son centre de gravité G_i : $O_i x'_i$ et $O_i y'_i$;
- ses moments d'inertie principaux : $I'_{xi} = \int y'^2 \, dS$ et $I'_{yi} = \int x'^2 \, dS$ par rapport à G_i ;
- l'orientation θ_i avec le repère général : θ_i = angle de l'axe principal de l'inertie la plus grande avec l'axe O_{yi}.

Il est rappelé que :
- le centre de torsion d'un voile simple (rectangulaire) est confondu avec son centre géométrique ou son centre de gravité ;
- pour un voile composé possédant un centre de symétrie, le centre de torsion est confondu avec ce centre de symétrie ;
- pour un voile composé de plusieurs voiles simples concourant au même point, ce point est le centre de torsion ;
- pour un voile en U symétrique, le centre de torsion est situé à l'extérieur de l'âme à une distance de celle-ci donnée par l'équation (29).

Par simplification, pour des voiles composés ne jouant pas un rôle prépondérant dans le contreventement, on pourra prendre leur centre de gravité comme centre de torsion.

5.4.3. Étude de la translation due à l'effort extérieur H

5.4.3.1. Hypothèses

Nous supposerons que :
- les voiles sont de sections constantes sur toute la hauteur du bâtiment, ou au moins que les inerties varient toutes dans les mêmes proportions et aux mêmes niveaux ;
- pour des voiles avec ouvertures, on prendra leur inertie équivalente (voir en 4 ci-dessus et 6.2.8 ci-après) ;

- les planchers sont infiniment rigides dans leur plan ;
- les voiles ont les mêmes conditions d'encastrement en pied et même module d'élasticité ;
- la répartition de l'effort H sera faite au prorata des rigidités, donc des inerties des voiles, car le rapport rigidité/inertie est le même pour une même déformation à une même altitude et que les déformées sont de la forme $\frac{k\,f(z)\,F}{E\,I}$ pour une force F appliquée à la cote z (voir éq. 30).

Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation des inerties au lieu de celle des rigidités.

5.4.3.2. Action d'une translation sur un voile

Pour toute translation unitaire du voile n°i parallèlement à Ox, on obtient (voir en 3.5 ci-dessus) deux forces de rappel :
- l'une parallèle à Ox et proportionnelle à l'inertie I_{yi} par rapport à $O_i y_i$;
- l'autre perpendiculaire à Ox et proportionnelle à l'inertie composée I_{xyi}.

De même, pour toute translation du voile n°i parallèlement à Oy, on obtient deux forces de rappel :
- l'une parallèle à Oy et proportionnelle à l'inertie I_{xi} par rapport à $O_i x_i$;
- l'autre perpendiculaire à Oy et proportionnelle à l'inertie composée I_{xyi}.

Les inerties I_{xi}, I_{yi} et I_{xyi} sont obtenues à partir des inerties principales I'_{xi}, I'_{yi} d'après les équations (10), (11) et (12) avec $\theta_i = (O_i x'_i ; O_i x_i)$; les inerties principales sont calculées à partir des équations (20) à (25).

On obtient ainsi :

$$I_{xi} = I'_{xi} \cos^2 \theta_i + I'_{yi} \sin^2 \theta_i \qquad (35)$$

$$I_{yi} = I'_{xi} \sin^2 \theta_i + I'_{yi} \cos^2 \theta_i \qquad (36)$$

$$I_{xyi} = (I'_{xi} - I'_{yi}) \cos \theta_i \sin \theta_i \qquad (37)$$

car $I'_{xyi} = 0$ puisque I'_{xi} et I'_{yi} sont les moments principaux d'inerties.

Comme toutes les forces de rappel sont proportionnelles aux rigidités, donc aux inerties, avec le même facteur de proportionnalité, nous pouvons remplacer ces forces de rappel par les vecteurs-inerties.

Si $\overline{i}$ et $\overline{j}$ représentent les vecteurs unitaires du repère Oxy, on obtient les résultantes $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ des forces (donc des inerties) (Fig. 35) :

$$\overline{P} = \sum I_{yi}\,\overline{i} + \sum I_{xyi}\,\overline{j}$$ pour une translation imposée parallèle à Ox,

$$\overline{Q} = \sum I_{xyi}\,\overline{i} + \sum I_{xi}\,\overline{j}$$ pour une translation imposée parallèle à Oy.

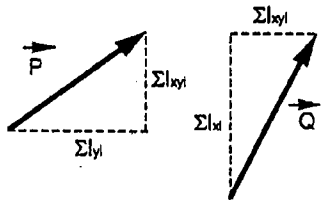


Fig. 35 – Résultantes P et Q.

Le point d'intersection C de ces résultantes définit le centre de torsion, car tout effort extérieur H (décomposable en deux forces suivant Ox et Oy), passant par C, provoque une translation ayant deux composantes parallèle à Ox et à Oy et entraînant des réactions de la structure passant également par ce point, donc sans moment de rotation.

Soient CX et CY les axes principaux de l'ensemble des voiles, δ l'angle $(O_i x_i, CX) = (O_i x_i, O_i X_i)$. La somme des inerties composées des voiles est nulle, (par définition des axes principaux).

• **Calcul de l'angle δ** (Fig. 36)

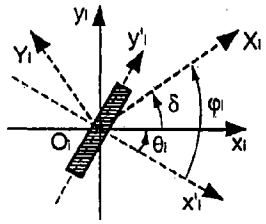


Fig. 36 – Angle δ.

D'après l'équation (12), on doit avoir : $\sum I_{XYi} = 0$ où I_{XYi} est l'inertie composée du voile par rapport aux axes $O_iX_iY_i$, parallèle au nouveau repère.

Repère	Inerties
$O_i x'_i y'_i$	I'_{xi} = inertie principale = $\iint y^2\,dS$ par rapport à Gix'_i I'_{yi} = inertie principale = $\iint x^2\,dS$ par rapport à Giy'_i $I'_{xyi} = 0$
$O_i x_i y_i$ (rotation : $\theta = -\varphi$)	$I_{xi} = I'_{xi}\cos^2\theta_i + I'_{yi}\sin^2\theta_i$ $I_{yi} = I'_{xi}\sin^2\theta_i + I'_{yi}\cos^2\theta_i$ $I_{xyi} = (I'_{xi} - I'_{yi})\sin\theta_i\cos\theta_i$
$O_i X_i Y_i$ (rotation : $-\delta$)	$I_{Xi} = I_{xi}\cos^2\delta + I_{yi}\sin^2\delta - 2\,I_{xyi}\sin\delta\cos\delta$ $I_{Yi} = I_{xi}\sin^2\delta + I_{yi}\cos^2\delta + 2\,I_{xyi}\sin\delta\cos\delta$ $I_{XYi} = (I_{xi} - I_{yi})\sin\delta\cos\delta + I_{xyi}(\cos^2\delta - \sin^2\delta)$

L'égalité $\sum I_{XYi} = 0$ entraîne :

$$\sum (I_{xi} - I_{yi})\,\frac{\sin 2\delta}{2} = -\sum I_{xyi}\cos 2\delta$$

$$\operatorname{tg} 2\delta = -2\,\frac{\sum I_{xyi}}{\sum (I_{xi} - I_{yi})} = -2\,\frac{\sum (I'_{xi} - I'_{yi})\sin\theta_i\cos\theta_i}{\sum [I'_{xi} - I'_{yi}]\,[\cos^2\theta_i - \sin^2\theta_i]}$$

$$\operatorname{tg} 2\delta = -\frac{\sum (I'_{xi} - I'_{yi})\sin 2\theta_i}{\sum (I'_{xi} - I'_{yi})\cos 2\theta_i} \qquad (38)$$

Pour un effort H_Y parallèle à CY, on obtient une répartition :

$$H_Y\,\frac{I_{Xi}}{\sum I_{Xi}}$$ parallèlement à CY et

$$H_Y\,\frac{I_{XYi}}{\sum I_{Xi}}$$ parallèlement à CX.

Si l'on ramène cet effort suivant le repère de base de chaque voile (c'est-à-dire ses axes principaux) $O_i x'_i y'_i$, on trouve pour chaque voile i des efforts F_{xi} et F_{yi} :
– suivant $O_i x'_i$:

$$F_{xi} = \frac{H_X}{\sum I_{Yi}}\,[I_{Yi}\cos\varphi_i - I_{XYi}\sin\varphi_i] + \frac{H_Y}{\sum I_{Xi}}\,[I_{XYi}\cos\varphi_i - I_{Xi}\sin\varphi_i] \qquad (39)$$

– suivant $O_i y'_i$:

$$F_{yi} = \frac{H_Y}{\sum I_{Xi}} [I_{Xi} \cos \varphi_i + I_{XYi} \sin \varphi_i] + \frac{H_X}{\sum I_{Yi}} [I_{XYi} \cos \varphi_i + I_{Yi} \sin \varphi_i] \quad (40)$$

5.4.3.3. *Détermination des résultantes P et Q*

La distance de la droite support de P au point O est déterminée en écrivant l'équilibre des moments des forces (Fig. 37) où x_{oi} et y_{oi} sont les coordonnées du centre de rotation O_i du voile i.

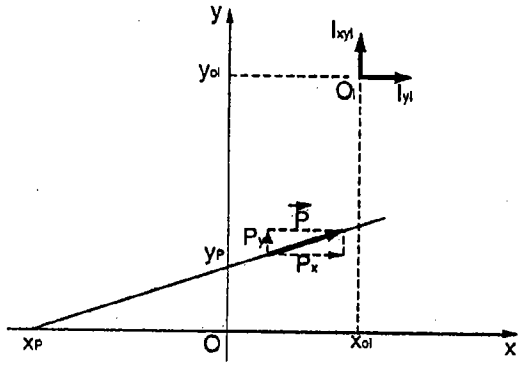


Fig. 37 – Résultante P.

Vecteur	P	Q
Composantes suivant : Ox Oy	$P_x = \sum I_{yi}$ (41) $P_y = \sum I_{xyi}$ (43)	$Q_x = \sum I_{xyi}$ (42) $Q_y = \sum I_{xi}$ (44)
Moment par rapport à O (positif sens trigo)	$M_P = \sum (I_{xyi} x_{oi} - I_{yi} y_{oi})$ (45)	$M_Q = \sum (I_{xi} x_{oi} - I_{xyi} y_{oi})$ (46)
Abscisse à l'origine de la droite support	$x_P = M_P / P_y$ (47) $y_P = - M_P / P_x$ (48)	$x_Q = M_Q / Q_y$ (49) $y_Q = - M_Q / Q_x$ (50)

Coordonnées de C :

$$x_C = \frac{y_P - y_Q}{\frac{y_P}{x_P} - \frac{y_Q}{x_Q}} \quad (51) \qquad \text{et} \qquad y_C = \frac{x_P - x_Q}{\frac{x_P}{y_P} - \frac{x_Q}{y_Q}} \quad (52)$$

5.4.3.4. *Étude de la rotation due au moment M = H.e*

Les efforts R_{xi} et R_{yi} dus à la rotation et repris dans chaque voile sont proportionnels à (Fig. 38) :
– leurs inerties principales I'_{xi} et I'_{yi} ;
– leur distance au centre de torsion C pour une même rotation d'angle α.

$$R_{xi} = K \alpha \, r_{xi} \, I'_{yi}$$
$$R_{yi} = K \alpha \, r_{yi} \, I'_{xi}$$

avec r_{xi} = distance de C à l'axe $O_i x'_i$ et r_{yi} = distance de C à l'axe $O_i y'_i$.

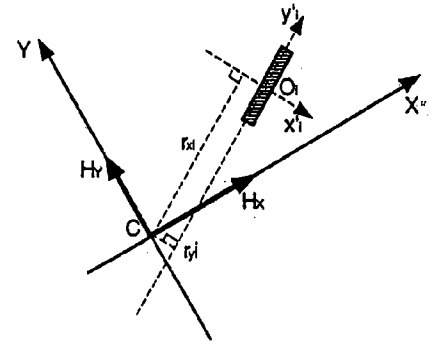


Fig. 38 – Distances r_{xi} et r_{yi}.

Le coefficient de proportionnalité K est obtenu en écrivant l'équilibre des moments des forces par rapport au centre de torsion C :

$$M = H \cdot e = \sum (R_{xi} r_{xi} + R_{yi} r_{yi}) = K \alpha \sum (r_{xi}^2 I'_{yi} + r_{yi}^2 I'_{xi})$$

d'où : $$K \alpha = \frac{M}{J} \quad \text{avec} \quad J = \sum (r_{xi}^2 I'_{yi} + r_{yi}^2 I'_{xi})$$

d'où : $$R_{xi} = \frac{M r_{xi} I'_{yi}}{J} \quad (53)$$

$$R_{yi} = \frac{M r_{yi} I'_{xi}}{J} \quad (54)$$

5.4.3.5. *Efforts finals dans les voiles*

Les efforts dans chaque voile i, dirigés suivant ses axes principaux d'inertie $O_i x'_i y'_i$, valent :

$$H'_x = F_{xi} + R_{xi} \quad (55)$$
$$H'_y = F_{yi} + R_{yi} \quad (56)$$

5.4.4. Exemple

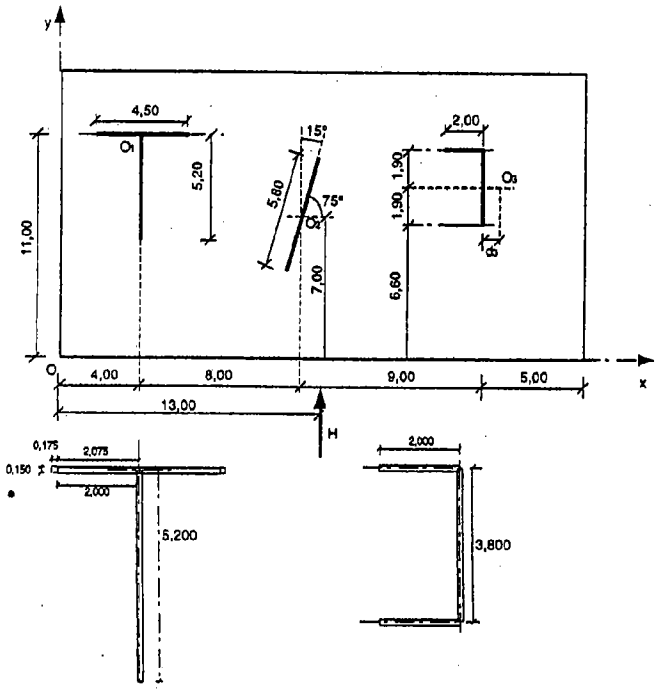
Soit un contreventement assuré par trois voiles (Fig. 39) ayant la même épaisseur de 0,15 m. Les dimensions sont prises entre l'extrémité des rectangles et les axes (voir grossissement en pied de figure). L'effort global dû au vent vaut H = 1,00 MN parallèlement à O*y*. La hauteur totale des voiles est de 40 m.

Nous limiterons la largeur des voiles à leur largeur efficace (voir en 2.3.4 ci-dessus), soit ici le 1/20 de 40 m = 2,00 m. Ainsi, pour le premier voile en forme de Té, nous retiendrons un débord de 2,00 m (soit une longueur de 2 + 2 + 0,15 = 4,15 m au lieu de 4,50 m).

Remarque

On pourrait, en compliquant les calculs, calculer l'inertie I_x par rapport à l'axe O*x* en prenant la largeur réduite de 4,15 m pour un vent parallèle à O*y* et l'inertie I_y par rapport à l'axe O*y* en prenant la largeur totale de l'aile, soit 4,50 m pour un vent parallèle à O*x*. Ce serait possible ici, car l'inertie composée I_{xy} (qui n'est pas calculable avec une largeur d'aile différente) est nulle.

Fig. 39 – Exemple.



5.4.4.1. Caractéristiques des voiles : inerties et centres de torsion individuels

On applique la méthode utilisée en 2.4 pour les moments d'inertie et en 3.2.3 pour le centre de torsion (lorsqu'on a des voiles composés) et l'on trouve :

• **Voile 1 :**

Rectangles	*t*	*h*	φ	*a*	*b*
1	0,15	4,15	90°	4,0	11,00
2	0,15	5,20	180°	4,0	8,40

$$I'_{x1} = = 4{,}0991 \text{ m}^4$$

$$I'_{y1} = 0{,}15 \times \frac{4{,}15^3}{12} + 5{,}2 \times \frac{0{,}15^3}{12} = 0{,}8949 \text{ m}^4$$

Comme on a trois éléments de voile rectangulaires concourants, le centre de torsion est au point commun $x_{C1} = 4{,}00$ m et $y_{C1} = 11{,}00$.

• **Voile 2 :**

$$I'_{x2} = 0{,}15 \times \frac{5{,}8^3}{12} = 2{,}4389 \text{ m}^4$$

$$I'_{y2} = 5{,}8 \times \frac{0{,}15^3}{12} = 0{,}0016 \text{ m}^4$$

L'angle φ vaut 165°.

Le centre de torsion est au centre du rectangle : $x_{C2} = 12{,}00$ et $y_{C2} = 7{,}00$.

• **Voile 3 :**

Rectangles	*t*	*h*	φ	*a*	*b*
1	0,15	2,00	– 90°	20,0	10,40
2	0,15	3,80	0	21,0	8,50
3	0,15	2,00	90°	20,0	6,60

$$I'_{x3} = 2 \times \frac{3{,}8^3}{12} - 1{,}85 \times \frac{3{,}5^3}{12} = 2{,}8530 \text{ m}^4$$

$$I'_{y3} = 0{,}4934 \text{ m}^4$$

Pour un voile en U symétrique (éq. 29), on a :

$$\delta = \frac{t(h_1 h_2)^2}{4I_x} = \frac{0{,}15 \times (2 \times 3{,}8)^2}{4 \times 2{,}8530} = 0{,}7592 \text{ m}$$

d'où les coordonnées du centre de torsion :

$x_{C3} = 21 + 0{,}7592 = 21{,}7592$ et $y_{C3} = 8{,}50$.

5.4.4.2. Centre de torsion de l'ensemble

	Notation	Formule	Unité	1	2	3	Total
Inerties principales	I'_{xi}	*donnée*	m^4	*4,0991*	*0*	*2,8530*	
	I'_{yi}	*donnée*	m^4	*0,8949*	*0*	*0,4934*	
ou bien dimensions	t_i	*donnée*	*m*	*0*	*0,15*	*0*	
	h_i	*donnée*	*m*	*0*	*5,8*	*0*	
Inerties principales	I'_{xi}	I'_{xi} ou $t_i h_i^3/12$	m^4	4,0991	2,4389	2,8530	
	I'_{yi}	I'_{yi} ou $t_i^3 h_i/12$	m^4	0,8949	0,0016	0,4934	
angle	θ_i	*donnée*	°	*0*	*165*	*0*	
	θ_i		rd	0,0000	0,2618	0,0000	
Inerties / $O_i x_i y_i$	I_{xi}	$I'_{xi} \cos^2\theta_i + I'_{yi} \sin^2\theta_i$	m^4	4,0991	2,2756	2,8530	9,2277
	I_{yi}	$I'_{xi} \sin^2\theta_i + I'_{yi} \cos^2\theta_i$	m^4	0,8949	0,1649	0,4934	1,5532
	I_{xyi}	$(I'_{xi} - I'_{yi}) \cos\theta_i \sin\theta_i$	m^4	0,0000	−0,6093	0,0000	−0,6093
centres de torsion	x_{oi}	*donnée*	*m*	*4,0000*	*12,0000*	*21,7592*	
O_i	y_{oi}	*donnée*	*m*	*11,0000*	*7,0000*	*8,5000*	
		$I_{xi}\, x_{oi}$	m^5	16,40	27,31	62,08	105,78
		$I_{yi}\, y_{oi}$	m^5	9,8439	1,1543	4,1939	15,1921
		$I_{xyi}\, x_{oi}$	m^5	0,0000	−7,3118	0,0000	−7,3118
		$I_{xyi}\, y_{oi}$	m^5	0,0000	−4,2652	0,0000	−4,2652
		$(I'_{xi} - I'_{yi}) \sin(2\theta_i)$	m^4	0,0000	−1,2186	0,0000	−1,2186
		$(I'_{xi} - I'_{yi}) \cos(2\theta_i)$	m^4	3,2042	2,1107	2,3596	7,6745

Composantes de P	P_x	$\Sigma(I_{yi})$	m4	1,5532
	P_y	$\Sigma(I_{xyi})$	m4	−0,6093
Composantes de Q	Q_x	$\Sigma(I_{xyi})$	m4	−0,6093
	Q_y	$\Sigma(I_{xi})$	m4	9,2277
Moment par rapport à O des	M_P	$\Sigma(I_{xyi}\, x_{oi} - I_{yi}\, y_{oi})$	m5	−22,5039
inerties de l'ensemble	M_Q	$\Sigma(I_{xi}\, x_{oi} - I_{xyi}\, y_{oi})$	m5	110,0482
Abscisse à l'origine	x_P	M_P / P_y	m	36,9330
Ordonnée à l'origine	y_P	$- M_P / P_x$	m	14,4887
Abscisse à l'origine	x_Q	M_Q / Q_y	m	11,9258
Ordonnée à l'origine	y_Q	$- M_Q / Q_x$	m	181,61
Centre de torsion	x_C	$(yP - yQ) / (yP / xP - yQ / xQ)$	m	11,2608
	y_C	$(xP - xQ) / (xP / yP - xQ / yQ)$	m	10,0712
Angle δ	tg 2δ	$= - (- 1{,}2186 / 7{,}6745)$		0,1588
	δ	= Arctg (tg 2δ) / 2	rd	0,0787
	δ		°	4,5113
force ext./repère Oxy	H_x	donnée	*kN*	*0*
	H_y	donnée	*kN*	*1000*
	x_{Hy}	donnée	*m*	*13*
	y_{Hx}	donnée	*m*	*0*
	M	$(x_{Hy} - x_C) H_y + (y_{Hx} - y_C) H_x$	kNm	1739,2
	H_X	$H_x \cos\delta + H_y \sin\delta$	kN	78,66
	H_Y	$- H_x \sin\delta + H_y \cos\delta$	kN	996,90

Les variables en italique sont des donnés.

	Notations	Formule	Unité	1	2	3	Total
Angle	φ_i	$\theta_i + \delta$	°	4,5113	169,511	4,5113	
	φ_i		rd	0,0787	2,9585	0,0787	
Inerties/repère	I_{xi}	$I'_{xi} \cos^2\varphi_i + I'_{yi} \sin^2\varphi_i$	m^4	4,0793	2,3581	2,8384	9,2758
CXY	I_{Yi}	$I'_{xi} \sin^2\varphi_i + I'_{yi} \cos^2\varphi_i$	m^4	0,9147	0,0824	0,5080	1,5051
	I_{XYi}	$(I'_{xi} - I'_{yi}) \sin\varphi_i \cos\varphi_i$	m^4	0,2512	−0,4363	0,1850	0,0000
		$I_{xi} \sin\varphi_i$	m^4	0,3209	0,4293	0,2233	0,9734
		$I_{xi} \cos\varphi_i$	m^4	4,0966	−2,3187	2,8296	4,5775
		$I_{Yi} \sin\varphi_i$	m^4	0,0719	0,0150	0,0400	0,1269
		$I_{Yi} \cos\varphi_i$	m^4	0,9119	−0,0810	0,5064	1,3373
		$I_{XYi} \sin\varphi_i$	m^4	0,0198	−0,0794	0,0146	−0,0451
		$I_{XYi} \cos\varphi_i$	m^4	0,2505	0,4290	0,1844	0,8639
Efforts dus à la	F_{xi}	équ. 43	kN	39,057	−0,116	21,534	
translation	F_{yi}	équ. 44	kN	456,028	−234,53	317,399	

	Notations	Formule	Unité	1	2	3	Total
Coord. de C dans $O_i x'_i y'_i$	x'_{ic}	$(x_C - x_{oi}) \cos\theta_i - (y_C - y_{oi}) \sin\theta_i$	m	7,261	−0,081	−10,498	
	y'_{ic}	$(x_C - x_{oi}) \sin\theta_i + (y_C - y_{oi}) \cos\theta_i$	m	−0,929	−3,158	1,571	
Dist. de C à $O_i x_i$	r_{xi}	y'_{ic}	m	−0,929	−3,158	1,571	
Dist. de C à $O_i y_i$	r_{yi}	$-x'_{ic}$	m	−7,261	0,081	10,498	
Rigidité à la tors.	J	$r_{xi}^2 I'_{yi} + r_{yi}^2 I'_{xi}$	m^6	216,874	0,032	315,665	532,57
Efforts dus à	R_{xi}	$M\, r_{xi} I'_{yi} / J$	kN	−2,71	0,02	2,53	
la torsion	R_{yi}	$M\, r_{yi} I'_{xi} / J$	kN	−97,20	0,64	97,81	
Efforts dans	H'_{xi}	$F_{xi} + R_{xi}$	kN	36,34	−0,13	24,07	
les voiles	H'_{yi}	$F_{yi} + R_{yi}$	kN	358,83	−233,89	415,21	
	H_{xi}	$H'_{xi} \cos\theta_i + H'_{yi} \sin\theta_i$	kN	−36,34	−60,41	24,07	0,00
	H_{yi}	$-H'_{xi} \sin\theta_i + H'_{yi} \cos\theta_i$	kN	358,83	225,96	415,21	1000,00

On vérifie bien que la somme des composantes des efforts des voiles suivant les axes d'origine sont égaux aux efforts extérieurs : 1 000 kN suivant Oy et 0 kN suivant Ox.

5.5. MÉTHODE DE LA RIGIDITÉ

5.5.1. Exposé de la méthode

Cette méthode [2] [10] est d'utilisation pratique sous forme matricielle. Elle suppose que les voiles ont des inerties transversales et des inerties composées négligeables devant l'inertie principale $I_i = \iint y^2\, dS$ dans le repère local $O_i x'_i y'_i$.

On définit :

- le vecteur sollicitation, composé, dans un repère général $Oxyz$ (z vertical) :
  - d'une force H_x parallèle à Ox,
  - d'une force H_y parallèle à Oy,
  - d'un moment M d'axe Oz,

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ M \end{pmatrix} \qquad (57)$$

- le vecteur déplacement représenté par :
  - un déplacement Δ_x parallèle à O_x,
  - un déplacement Δ_y parallèle à Oy,
  - une rotation Δ_ω d'axe Oz

$$\overline{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_\omega \end{pmatrix} \qquad (58)$$

Pour des voiles d'inertie constante sur toute la hauteur (ou du moins dont les inerties varient toutes dans les mêmes proportions et aux mêmes niveaux), de mêmes conditions d'encastrement en pied, on a proportionnalité entre la sollicitation et la rigidité pour une même déformation unitaire. Cette proportionnalité nous permet de remplacer la rigidité par l'inertie I_i.

Si $\overline{I}$ représente la matrice de rigidité, on a la relation matricielle :
sollicitation = rigidité × déplacement :

$$\overline{S} = \overline{I} \times \overline{\Delta} \qquad (59)$$

Considérons des voiles simples ou des éléments rectangulaires de voiles composés (voir en 1 ci-dessus) dont l'inertie transversale $I'_{yi} = \iint x^2\, dS$ est très faible, devant l'inertie longitudinale $I'_{xi} = \iint y^2\, dS$. Le seul effort que ces voiles peuvent reprendre est un effort H_i parallèle à $O_i y'_i$ (Fig. 40).

Le déplacement suivant $O_i y'_i$ vaut :

$$\Delta_i = \Delta_x \sin\theta_i + \Delta_y \cos\theta_i + r_i \Delta_\omega \qquad (60)$$

avec : $$r_i = x_{oi} \cos\theta_i - y_{oi} \sin\theta_i \qquad (61)$$

qui représente la distance de l'origine des coordonnées O à l'axe supportant l'effort H_i.

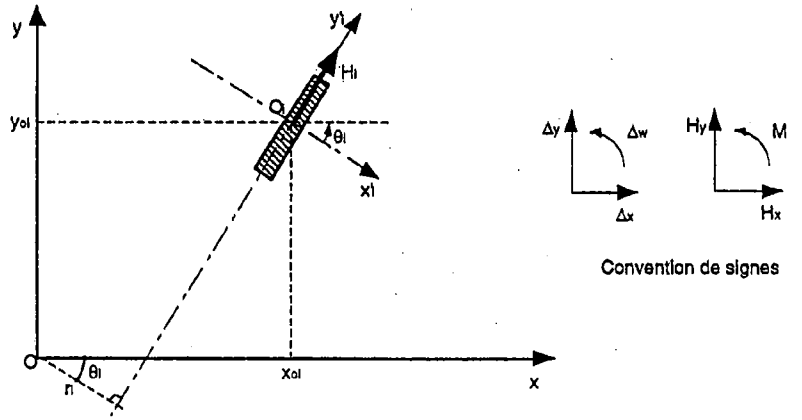


Fig. 40 – Définitions.

Pour l'effort H_i dans le voile i et suivant la plus grande inertie I_i, l'équation (59) s'écrit :

$$H_i = I_i \Delta_i = I_i [\Delta_x \sin \theta_i + \Delta_y \cos \theta_i + r_i \Delta_\omega] \quad (62)$$

L'équilibre général des sollicitations agissantes (H_x, H_y, M) et des sollicitations résistantes s'écrit :

$$H_x = \sum H_i \sin \theta_i \quad (63)$$

$$H_y = \sum H_i \cos \theta_i \quad (64)$$

$$M = \sum H_i r_i \quad (65)$$

Or, d'après (62) :

$$H_x = \sum I_i [\Delta_x \sin \theta_i + \Delta_y \cos \theta_i + r_i \Delta_\omega] \sin \theta_i$$

$$H_x = \sum I_i \sin^2 \theta_i \Delta_x + \sum I_i \sin \theta_i \cos \theta_i \Delta_y + \sum I_i r_i \sin \theta_i \Delta_\omega$$

de même :

$$H_y = \sum H_i \cos \theta_i = \sum I_i \sin \theta_i \cos \theta_i \Delta_x + \sum I_i \cos^2 \theta_i \Delta_y + \sum I_i r_i \cos \theta_i \Delta_\omega$$

$$M = \sum H_i r_i = \sum I_i r_i \sin \theta_i \Delta_x + \sum I_i r_i \cos \theta_i \Delta_y + \sum I_i r_i^2 \Delta_\omega$$

Posons :

$$\sum I_x = \sum I_i \sin^2 \theta_i \quad (66)$$

$$\sum I_y = \sum I_i \cos^2 \theta_i \quad (67)$$

$$\sum I_t = \sum I_i r_i^2 \quad (68)$$

$$\sum I_{xy} = \sum I_i \cos \theta_i \sin \theta_i \quad (69)$$

$$\sum I_{xt} = \sum I_i r_i \sin \theta_i \quad (70)$$

$$\sum I_{yt} = \sum I_i r_i \cos \theta_i \quad (71)$$

La matrice $\overline{I}$ de l'équation (59) devient :

$$\overline{I} = \begin{pmatrix} \sum I_x & \sum I_{xy} & \sum I_{xt} \\ \sum I_{xy} & \sum I_y & \sum I_{yt} \\ \sum I_{xt} & \sum I_{yt} & \sum I_t \end{pmatrix} \quad (72)$$

En inversant cette matrice, l'équation (59) devient :

$$\overline{\Delta} = \overline{I}^{-1} \times \overline{S} \quad (73)$$

Ce qui permet de connaître les déplacements (Δ_x, Δ_y, Δ_ω) et donc les efforts H_i sollicitant chaque voile par l'équation (62).

5.5.2. EXEMPLE

Nous prendrons le même exemple que précédemment (Fig. 39).

Calculons les inerties d'après les équations (66) à (71) pour les 6 voiles élémentaires :
- *a* et *b* pour le premier voile ;
- *c* pour le deuxième voile ;
- *d* et *e* pour le troisième voile.

Pour des voiles composés, on a supposé que l'inertie transversale I_{yi} et l'inertie composée I_{xyi} étaient négligeables par rapport à l'inertie I_{xi}. Cependant, comme nous le verrons dans la comparaison des deux méthodes en 5.6 ci-après, nous avons intérêt à prendre l'inertie d'ensemble dans la direction considérée.

Par exemple, pour le voile 1, composé de deux voiles simples (rectangulaires) perpendiculaires *a* et *b*, on a le choix entre prendre les seules inerties principales $\frac{th^3}{12}$ ou l'inertie de l'ensemble :

- dans la direction $O_i y_i$ on introduit 4,099 1 m^4 au lieu de $\frac{th^3}{12} = \frac{0{,}15 \times 5{,}2^3}{12} = 1{,}757\,6$ m^4 ;

- dans la direction $O_i x_i$: 0,8949 m^4 au lieu de $\frac{0{,}15 \times 4{,}15^3}{12} = 0{,}8934$ m^4.

Pour le voile 3, composé des trois rectangles *d*, *e* et *f*, on a :

$$I_d = I_f = \frac{0{,}493\,4}{2} = 0{,}246\,7 \text{ m}^4 \quad \text{au lieu de} \quad 0{,}15 \frac{2^3}{12} = 0{,}100 \text{ m}^4$$

$$I_e = 2{,}853\,0 \text{ m}^4 \quad \text{au lieu de} \quad 0{,}15 \frac{3{,}8^3}{12} = 0{,}685\,9 \text{ m}^4$$

(Voir tableaux en pages 1350 et 1351).

5.6. COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES DU CENTRE DE TORSION ET DE LA RIGIDITÉ

La méthode de la rigidité néglige l'effet d'inertie d'ensemble des voiles composés ainsi que l'inertie transversale I'_{yi} et l'inertie composée I'_{xyi}.
Le voile simple oblique (n° 2 dans la méthode du centre de torsion ou voile *c* dans la méthode de la rigidité) reprend un effort beaucoup plus important avec la méthode de la rigidité si l'on ne prend que son inertie I'_{xi} (526,3 kN au lieu de 233,9, voir tableau p.1352).

• **Méthode de la rigidité - Exemple** (Fig. 39)

	Notation	Formule	Unité	a	b	c	d	e	f	Total
Inerties	I_i	*donnée*	m^4	*0,8949*	*4,0991*	*0*	*0,2467*	*2,5354*	*0,2467*	
ou bien dimensions	t_i	*donnée*	*m*	*0,15*	*0,15*	*0,15*	*0,15*	*0,15*	*0,15*	
	h_i	*donnée*	*m*	*4,5*	*5,2*	*5,8*	*2*	*3,8*	*2*	
Inertie principale	I_i	*Max [I_i , $I_i h_i^3 / 12$]*	m^4	*1,1391*	*4,0991*	*2,4389*	*0,2467*	*2,5354*	*0,2467*	
Angle	θ_i	*donnée*	°	*90*	*180*	*165*	*–90*	*180*	*90*	
	θ_i		*rad*	*1,5708*	*3,1416*	*2,8798*	*–1,5708*	*3,1416*	*1,5708*	
Coordonnées centre	x_{oi}	*donnée*	*m*	*4,0000*	*4,0000*	*12,0000*	*20,0000*	*20,9250*	*20,0000*	
	y_{oi}	*donnée*	*m*	*10,9250*	*8,3250*	*7,0000*	*10,3250*	*8,5000*	*6,6750*	
Distance du centre à O	r_i	$x_{oi} \cos\theta_i - y_{oi} \sin\theta_i$	m	*–10,9250*	–4,0000	–13,4028	10,3250	–20,9250	–6,6750	
Inerties	I_x	$I_i \sin^2\theta_i$	m^4	*1,1391*	0,0000	0,1634	0,2467	0,0000	0,2467	1,7958
	I_y	$I_i \cos^2\theta_i$	m^4	*0,0000*	4,0991	2,2755	0,0000	2,5354	0,0000	8,9100
	I_t	$I_i f_i^2$	m^6	*135,9535*	65,5856	438,1147	26,2996	1110,139	10,9919	1787,084
	I_{xy}	$I_i \sin\theta_i \cos\theta_i$	m^4	*0,0000*	0,0000	–0,6097	0,0000	0,0000	0,0000	–0,6097
	I_{xt}	$I_i r_i \sin\theta_i$	m^5	*–12,4443*	0,0000	–8,4603	–2,5472	0,0000	–1,6467	–25,0985
	I_{yt}	$I_i r_i \cos\theta_i$	m^5	*0,0000*	16,3964	31,5744	0,0000	53,0532	0,0000	101,0240

Les valeurs en italiques sont des données

Matrice I

1,796	–0,610	–25,098
–0,610	8,910	101,024
–25,098	101,024	1787,084

Matrice I^{-1}

0,80729	–0,20417	0,02288
–0,20417	0,36422	–0,02346
0,02288	–0,02346	0,00221

Absc. de H_y	x_{Hy}	*donnée*	*m*	*13,000*
Ord. de H_x	y_{Hx}	*donnée*	*m*	*0,000*
Sollicitations ext.	H_x	*donnée*	*kN*	*0,00*
	H_y	*donnée*	*kN*	*1000,00*
	M	$H_y x_{Hy} - H_x y_{Hx}$	kNm	13000,00

Δ_x	$[I]^{-1} \times [H_x, H_y, M]$	m^4/kN	93,264
Δ_y	d°	m^4/kN	59,282
Δ_ω	d°	m^4/kN	5,233

				a	b	c	d	e	f	Total
	Δ_i	$\Delta_x \sin\theta_i + \Delta_y \cos\theta_i + r_i \Delta_\omega$	m^4/kN	36,09	–80,21	–103,3	–39,23	–168,8	58,33	–297,06
Effort dans voiles	H_i	$I_i \Delta_i$	kN	41,1	–328,8	–251,8	–9,7	–427,9	14,4	–962,76
Composantes parallèles										
à Ox		$H_i \sin\theta_i$	kN	41,11	0,00	–65,18	9,68	0,00	14,39	0,0000
à Oy		$H_i \cos\theta_i$	kN	0,00	328,8	243,26	0,00	427,93	0,00	1000,00

On constate bien que les résultantes des efforts repris par les voiles sont égales aux efforts extérieurs : 0 kN suivant Ox et 1 000 kN suivant Oy.

Par contre, si l'on introduit, pour chaque élément, l'inertie d'ensemble dans la direction considérée, les résultats sont beaucoup plus proches (251,8 à comparer à 233,9 kN).

Méthode du centre de torsion				Méthode de la rigidité simple			Méthode de la rigidité simple		Comparaison
Voile	Inerties d'ensemble		Efforts	Voile	Inerties simples	Efforts	Inerties corrigées	Efforts	
n°		m⁴	kN	n°	m⁴	kN	m⁴	kN	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(9) / (4)
1	$I'x_1$	4,0991	358,8	a	1,7576	173,6	4,0991	328,8	0,92
	$I'y_1$	0,8949	36,3	b	0,8934	107,0	0,8949	41,1	1,13
2	$I'x_2$	2,4389	233,9	c	2,4389	526,3	2,4389	251,8	1,08
	$I'y_2$	0,0016	0,13	-	-	-	-	-	-
3	$I'x_3$	0,4934	24,1	d	0,1000	10,7	0,2467	9,7	0,80
							(*)		(**)
	$I'y_3$	2,8530	415,2	e	0,6859	318,0	2,8530	427,9	1,03
				f	0,1000	18,6	0,2467	14,4	1,19
									(**)

(*) 0,2467 = 0,4934 / 2
(**) 9,7 / (24,1 / 2) = 0,80 et 14,4 / (24,1 / 2) = 0,85

• **Application de la méthode des voiles parallèles** (voir en 5.3 ci-dessus)
Pour des raisons de simplification, il arrive que l'on applique la méthode des voiles parallèles à un système de voiles ne remplissant pas exactement les conditions.

Pour le même exemple (Fig. 39), on peut dresser le tableau de calcul, en remarquant que l'on prendra les moments d'inertie par rapport aux axes $O_i x_i$ perpendiculaires au vent.

	Formule	1	2	3	Total
I_i		4,0991	2,2756	2,8530	9,2277
d_i		4	12	21,7592	
$I_i d_i$		16,396	27,307	62,079	105,783
d_G	$\sum (I_i d_i) / \sum (I_i)$	11,464			
x_H	$14,00 - d_G$	2,536			
x_i	$d_i - d_G$	- 7,464	0,536	10,296	
$I_i x_i^2$		228,341	0,655	302,417	531,413
$x_i x_H$		- 18,931	1,361	26,114	
A	$I_i / \sum (I_i)$	0,444	0,247	0,309	1,00
B	$I_i x_i x_H / \sum (I_i x_i^2)$	- 0,1460	0,0058	0,1402	0,00
H_i	H (A + B)	298,19	252,43	449,38	1000,00

• **Résultats comparés des trois méthodes**

Voile	«Centre de torsion»	«Rigidité» avec l'inertie du seul voile parallèle au vent	«Rigidité» avec l'inertie du voile composé	«Voiles parallèles» avec l'inertie du voile composé
1	359	174	329	298
2	234	526	252	252
3	415	318	428	449

En conclusion, on peut considérer que la méthode du centre de torsion donne les résultats les plus proches de la réalité. On note :
- que la méthode des voiles parallèles est à appliquer avec précaution pour des voiles composés, car elle sous-estime fortement les sollicitations reprises par les voiles composés en torsion ;
- que la méthode de la rigidité donne des résultats satisfaisants à condition d'introduire l'inertie d'ensemble dans la direction de l'élément de voile.

5.6 - CAS PARTICULIERS

5.6.1 - Trois voiles simples non parallèles et non concourants

Soient (Fig. 41) :
- A, B et C les points de rencontre des axes des trois voiles deux à deux ;
- AD la distance du point A à la droite 1 ;
- BE la distance du point B à la droite 2 ;
- CF la distance du point C à la droite 3 ;
- F_1, F_2 et F_3 les forces reprises par chacun des trois voiles.

Le moment des forces par rapport au point A vaut [1] :

$$M_A = \delta_A W = F_1 . AD \quad \text{d'où} \quad F_1 = \frac{\delta_A W}{AD} . \qquad \text{De même :} \quad F_2 = \frac{\delta_B W}{EB} \quad \text{et} \quad F_3 = \frac{\delta_C W}{CF}$$

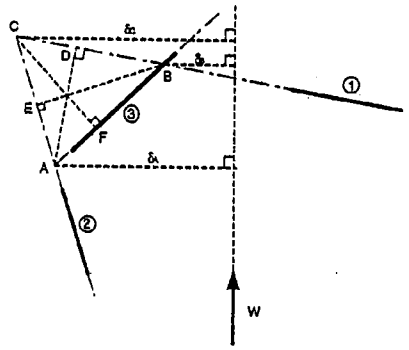


Fig. 41 – Trois voiles simples non parallèles et non concourants.

5.6.2. Voile composé en U symétrique seul

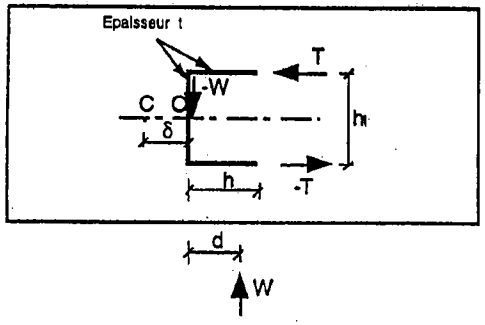


Fig. 42 – Voile en U symétrique seul.

Le moment d'inertie peut être calculé par différence de deux rectangles, extérieur et intérieur. Le centre de torsion est en C tel que (voir en 3.1 ci-dessus) :

$$\delta = \frac{h_t^2\, h^2\, t}{4\, I}$$

En l'absence de tout autre contreventement, le moment des forces par rapport au point C s'écrit :

$M_C = (d + \delta)\, W = T\, h_t$ d'où l'effort dans les deux ailes dû à W :

$$T = \frac{(d+\delta)W}{h_t}$$ et l'effort dans l'âme $T_a = W$

5.6.3. Voile de pignon et petits voiles

Supposons que les inerties des petits voiles sont infiniment petites par rapport à celle du pignon [1]. Le centre de torsion est situé au milieu du pignon et l'ensemble pivote autour de ce point sous l'action de l'effort W (Fig. 43).

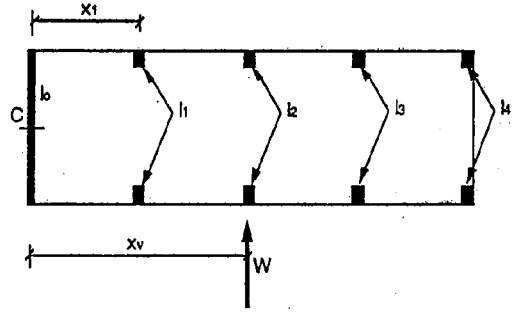


Fig. 43 – Voile pignon important.

La méthode développée en 5.3 s'applique. La formule $F_i = W\, I_i \left[\frac{1}{\sum I_i} + \frac{x_i x_v}{\sum I_i x_i^2}\right]$ devient avec $x_0 = 0$ pour le voile pignon et $\sum I_i = I_0$. En négligeant le premier terme entre crochets très petit devant le deuxième :

pour $i > 0$: $F_i = \dfrac{W I_i x_i x_v}{\sum_{i=1}^{n} I_i x_i^2}$ et $F_0 = W\left(1 - \sum_{i=1}^{n} F_i\right)$

EXEMPLE

Pour un pignon et quatre petits voiles régulièrement espacés et de même inertie totale I_1 (Fig. 43), on trouve :

$$x_1 = 0{,}5\, x_v \; ; \quad x_2 = x_v \; ; \quad x_3 = 1{,}5\, x_v \; ; \quad x_4 = 2\, x_v$$

$$\sum I_i x_i^2 = I_1\,(0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4)\, x_v^2 = 7{,}5\, I_1\, x_v^2$$

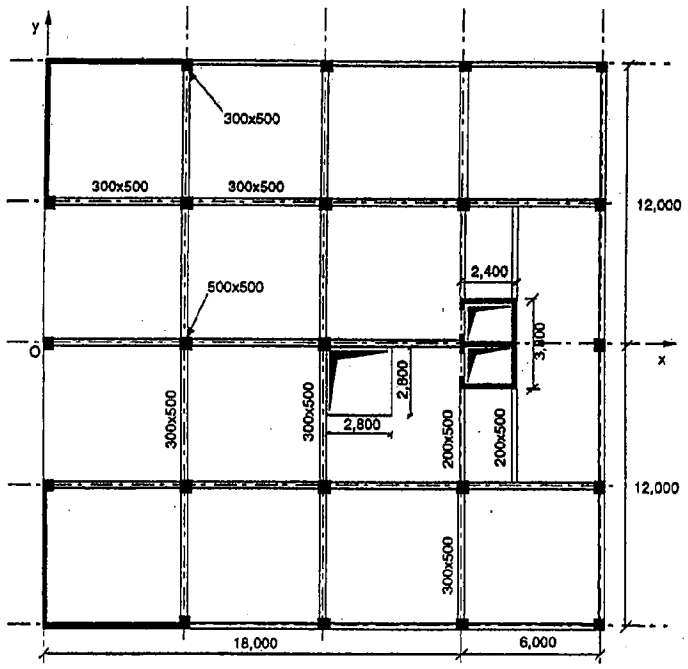
$$F_1 = \frac{0{,}5\, W I_1\, x_v^2}{7{,}5\, I_1\, x_v^2} = \frac{W}{15} \; ; \quad F_2 = \frac{W I_1\, x_v^2}{7{,}5\, I_1\, x_v^2} = \frac{2\,W}{15} \; ; \quad F_3 = \frac{1{,}5\, W I_1\, x_v^2}{7{,}5\, I_1 x_v^2} = \frac{3\,W}{15}$$

$$F_4 = \frac{2\, W I_1\, x_v^2}{7{,}5\, I_1\, x_v^2} = \frac{4W}{15} \; ; \quad \sum_{i=1}^{n} F_i = \frac{10\,W}{15} = \frac{2W}{3}$$

d'où : $F_0 = W - \dfrac{2\,W}{3} = \dfrac{W}{3}$

Ce dispositif de contreventement est peu économique car le voile le plus à droite reprend un effort important (26,7 % de l'effort total) avec une très faible inertie. En outre, il est vivement déconseillé en cas de séisme.

5.7. PROGRAMME « CONTREV ». EXEMPLE



Détail de la cage d'escalier

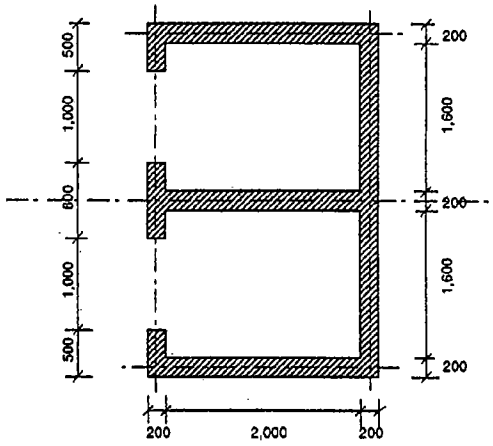


Fig. 44 – Plan d'étage.

Soit un immeuble de bureaux R+11, de 24,2 m par 24,2 m de section en plan contreventé par deux voiles cornières en angle et une cage d'ascenseur. Les planchers sont constitués de poutres croisées dans les deux directions (Fig. 44).

5.7.1. Données générales

5.7.1.1. Charges gravitaires

• En étage courant

Poids propre :

dalle d'épaisseur 0,18 m :	0,18 m × 24,5 kN/m³ =	4,410 kN/m²
chape de 0,04 m d'épaisseur :	0,04 m × 19,6 kN/m³ =	0,784 kN/m²
cloison très légère (moins de 1 kN/m suivant NF P 06 001), on prend 0,5 kN/m² considéré comme charge d'exploitation :		0,500 kN/m²

Charge d'exploitation (bureaux NF P 06 001) : 2,500 kN/m²

d'où : $g = 4,41 + 0,784 = 5,194$ arrondi à 5,2 kN/m²
$q = 2,5 + 0,5 = 3,0$ kN/m²

• en terrasse

Poids propre :

dalle d'épaisseur 0,18 m :	0,18 m × 24,5 kN/m³ =	4,410 kN/m²
protection d'étanchéité en gravillons de 0,04 m d'épaisseur :	0,04 m × 19,6 kN/m³ =	0,784 kN/m²
étanchéité multicouche :		0,120 kN/m²
forme de pente, épaisseur comprise entre 0,04 et 0,14 m (10 m maximum de pente à 1 %), d'où une épaisseur moyenne = 0,04 + (0,14 – 0,04) × 2 / 3 = 0,107 m	0,107 m × 19,6 kN/m³ =	2,100 kN/m²

Charge d'exploitation de service : 1,000 kN/m²
(valeur inférieure à la charge de neige)

d'où : $g = 4,410 + 0,784 + 0,120 + 2,100 = 7,414$ arrondi à 7,42 kN/m²
$q = 1,00$ kN/m²

5.7.1.2. Vent

Région III, site normal
Dimensions en plan 24,2 × 24,2 m
12 niveaux de 3,150 m

5.7.2. Données préparatoires à l'utilisation du programme « CONTREV »

5.7.2.1. Voile d'angle - Aires de planchers à prendre en compte (Fig. 45) (voir chapitre 3, §. 6.3)

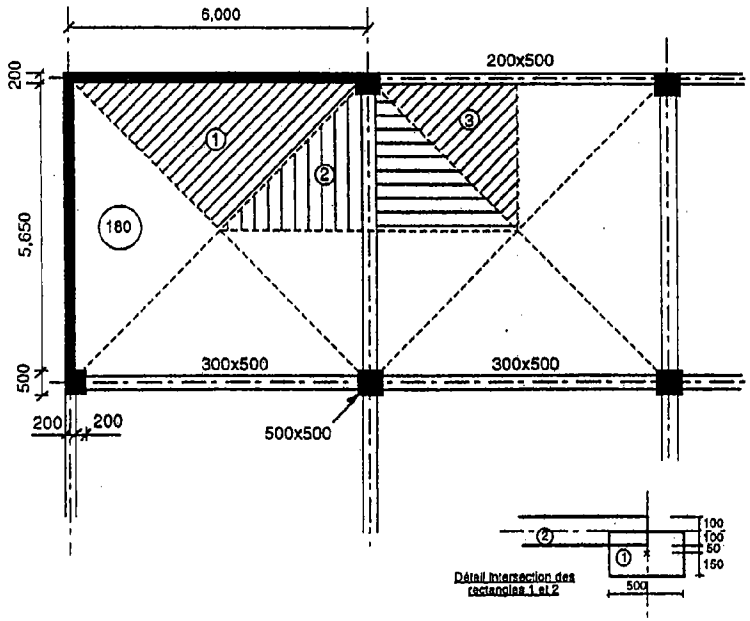


Fig. 45 – Aires de plancher des voiles d'angle.

Remarques

1 - La longueur d'un rectangle est comprise entre intersection des axes ou d'une extrémité à une intersection, d'où la valeur de 0,30 m ci-dessus et non 0,40 m (voir détail de la figure 45) pour le poteau de 0,40 × 0,50 m constituant le rectangle 1 du voile 1.

2 - Une charge apportée par une poutre est considérée appliquée au nu de l'appui.

Le voile est constitué de 4 rectangles :
1 : poteau 0,30 × 0,50
2 : rectangle 0,20 × 6,00
3 : rectangle 0,20 × 6,00
4 : poteau 0,30 × 0,50

Le ***rectangle 1*** reprend une aire de plancher égale à 2 fois le triangle 2,
soit $2 (3 \times 3) / 2 = 9{,}0\ m^2$ avec une charge excentrée de –0,15 m (voir détail de la figure 45).

Poids propre de la poutre reprise par le rectangle 1 (située sur l'axe vertical de la figure, car dans l'axe du rectangle 1) :
$g = 0{,}3 \times (0{,}5 - 0{,}18) \times 24{,}5 \times 3$ m = 7,06 kN excentré de –0,15 m.

Le ***rectangle 2*** du voile reprend une aire de plancher de :
aire 3 = 4,50 m² excentrée de –3,25 m.
aire 1 = $(6 \times 3) / 2 = 9\ m^2$ centrée
aire totale = 13,5 m².

Poids propre de la poutre reprise par le rectangle 2 (axe horizontal de la figure, car dans l'axe du rectangle 2) :
$g = 0{,}2 \times (0{,}5 - 0{,}18) \times 24{,}5 \times 3$ m = 4,70 kN excentré de –3,25 m.

Rectangle	1	2	3	Total 2
Aire	9	4,5	9	13,5
excentricité	–0,15	–3,25	0	–1,083
Poutre	7,06	4,70	0	4,70
excentricité	–0,15	–3,25	0	–3,25

5.7.2.2. Voile d'ascenseur - Aires de plancher (Fig. 46)

Suivant qu'il existe un linteau conséquent ou non, nous considérerons le voile comme monolithe fermé avec l'inertie équivalente calculée pour deux files d'ouverture ou bien en profil ouvert.

Le linteau ayant l'épaisseur du plancher (0,18 m), nous en négligerons l'incidence.

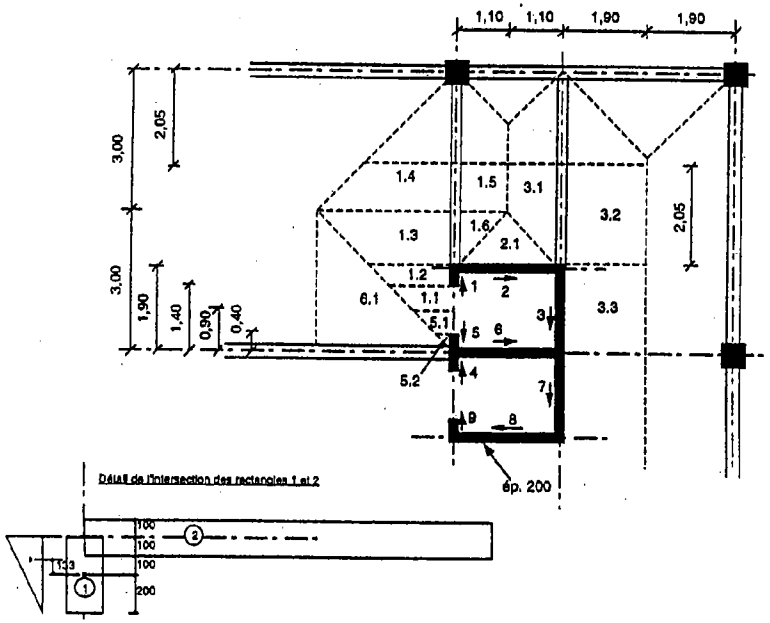


Fig. 46 – Affectation des aires de plancher aux différents rectangles du voile d'ascenseur.

Remarque

Les aires 1.3 à 1.6 reprises par la poutre sont affectées au rectangle 1 et non au rectangle 2, car l'excentricité de la charge doit s'exprimer dans l'axe d'un rectangle.

• **Rectangle 1 : charges**

élément de plancher	base m	haut. 1 m	haut. 2 m	aire en m²	excentricité / centre de gravité du rectangle	produit
1.1	0,50	1,50	1,00	0,625	–0,2000 (*)	–0,1250
1.2	0,50	1,40	1,40	0,700	0,0000	0,0000
	0,50	0,50	0,00	0,125	0,1333	0,0167
1.3	1,10	3,00	1,90	2,695	0,3000	0,8085
1.4	0,95	3,00	2,05	2,399	0,3000	0,7197
1.5	0,95	1,10	1,10	1,045	0,3000	0,3135
1.6	1,10	1,10	0,00	0,605	0,3000	0,1815
Total				8,194		1,9149

(*) Voir détail de la figure 46.

d'où l'excentricité $= \frac{1,914\,9}{8,194} = 0,233\,7$ m.

Poids propre de la poutre :
2,05 m × 0,2 m × (0,5 m – 0,18 m) × 24,5 kN/m³ = 3,21 kN excentré de 0,30 m.

• **Rectangle 2** : Aire 2.1 centrée = 2,2 × 1,1 / 2 = 1,21 m²

• **Rectangle 3 : charges**

élément de plancher	base m	haut. 1 m	haut. 2 m	aire en m²	excentricité / centre de gravité du rectangle	produit
3.1	1,10	2,05	0,95	1,650	–1,000	–1,650
3.2	1,90	2,05	2,05	3,895	–1,000	–3,895
3.3	1,90	1,90	1,90	3,610	0	0
Total				9,155		–5,545

d'où l'excentricité : $\frac{-5,545}{9,155} = 0,6057$ m.

Poids propre de la poutre :
2,05 m × 0,2 m × (0,5 m – 0,18 m) × 24,5 kN/m³ = 3,21 kN excentré de –1,00 m.

• **Rectangle 4 et 5 : charges**

élément de plancher	base m	haut. 1 m	haut. 2 m	aire en m²	excentricité / centre de gravité du rectangle	produit
5.1	0,50	1,00	0,50	0,375	–2,0000	–0,0750
5.2	0,40	0,40	0,00	0,080	0,0667	0,0053
Total				0,455		–0,0697

d'où l'excentricité = $\frac{-0,069\,7}{0,455} = -0,153\,2$ m.

• **Rectangle 6** : Deux fois l'aire 6.1 = 2 × 3 × 3 / 2 = 9,00 m² excentrée de –1,20 m

Poids propre poutre :
0,30 × (0,5 – 0,3) × 24,5 × 3 m = 4,41 kN excentré de –1,20 m.

• **Rectangles 7, 8 et 9 :** symétriques des rectangles 3, 2 et 1 respectivement.

5.7.2.3. Niveau terrasse . Voile 1

Charges permanentes : $g = 7{,}42$ kN/m²
Charges d'exploitation : $q = 1{,}00$ kN/m²

Voile 1	Rect. 1	Rect. 2
dimension t	0,50	0,20
dimension h	0,30	6,00
centre a	6,00	3,00
centre b	11,85	12,00
angle φ	0	90
aire reprise m²	9,00	13,50
G plancher	66,78	100,17
exc. plancher	−0,1500	−1,0833
G poutres	7,06	4,70
exc. poutres	−0,1500	−3,250
G	73,84	104,87
exc. de G	−0,1500	−1,1804 (*)
Q	9,00	13,50
exc. de Q	−0,1500	−1,083
Nombre de planchers repris	2	1

$$(*)\ \frac{100{,}17 \times (-1{,}083) + 4{,}7 \times (-3{,}25)}{104{,}87} = -1{,}1804 \text{ m}$$

• **Rectangle 3**

Dito rectangle 2 sauf : $a = 0$; $b = 9{,}00$; angle = 180°.

• **Rectangle 4**

Dito rectangle 1 sauf : $a = 0{,}15$; $b = 6{,}00$; angle = −90°.

5.7.2.4. Niveau terrasse . Voile 2 (avec $g = 7{,}42$ et $q = 1$ kN/m²)

	Rect. 1	Rect. 2	Rect. 3	Rect. 4	Rect. 5	Rect. 6	Rect. 7	Rect. 8	Rect. 9
dimension t	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
dimension h	0,40	2,20	1,80	0,40	0,40	2,20	1,80	2,20	0,40
centre a	18,00	19,10	20,20	18,00	18,00	19,10	20,20	19,10	18,00
centre b	1,60	1,80	0,90	−0,20	0,20	0	−0,90	−1,80	−1,60
angle φ	0	−90	180	0	180	−90	180	90	0
aire reprise m²	8,194	1,210	9,155	0,455	0,455	9	9,155	1,210	8,194
G plancher	60,80	8,98	67,93	3,376	3,376	66,78	67,93	8,98	60,80
exc. plancher	0,2337	0	-	-	-	−1,200	-	0	0,2337
G poutres	3,21	0	0,6057	0,1532	0,1532	4,41	0,6057	0	3,21
exc. poutres	0,300	0	3,21	0	0	−1,200	3,21	0	0,300
G	64,01	8,98	−1,000	0	0	71,19	−1,000	8,98	64,01
exc. de G	0,2370	0	71,14	3,376	3,376	−1,200	71,14	0	0,2370
			-	-	-		-		
			0,6235	0,1532	0,1532		0,6235		
Q	8,194	1,210	9,155	0,455	0,455	9,000	9,155	1,210	8,194
exc. de Q	0,2337	0	-	-	-	−1,200	-	0	0,2337
			0,6057	0,1532	0,1532		0,6057		
Nombre de planchers repris	1	1	1	1	1	1	1	1	1

5.7.2.5. Niveau courant

Si une grande précision n'est pas recherchée, on peut éviter de décrire la géométrie des voiles et leurs charges en appliquant un coefficient multiplicateur sur les charges permanentes et sur les charges variables :

$$k_g = \frac{5{,}2}{7{,}414} = 0{,}701\,4$$

$$k_q = \frac{3{,}0}{1{,}0} = 3{,}0$$

5.7.3. Règles PS 92 (version disponible en octobre 1994).

Rappels, compléments ou modifications par rapport à ce qui est exposé ci-dessus au chapitre 3, articles 5.1 à 5.13 pour la méthode de la force statique équivalente pour *bâtiments réguliers* (voir en 13 ci-après).

1) Période de vibration propre T en secondes

On pourra utiliser les programme « RAYLEIGH » ou « STODOLA » ou encore la formule forfaitaire, avec Lx = dimension du bâtiment parallèlement à l'action du séisme (en m) :

bâtiments contreventés par voiles en béton armé	bâtiments contreventés par ossatures avec remplissage en maçonnerie
$T = 0{,}08 \dfrac{H}{\sqrt{L_x}} \sqrt{\dfrac{H}{L_x + H}}$	$T = 0{,}06 \dfrac{H}{\sqrt{L_x}} \sqrt{\dfrac{H}{L_x + H}}$

2) Accélération nominale a_N : (voir chapitre 3, §. 5.6)

Elle est fonction de la zone géographique (chap.3, Fig. 63) et de la classe de risque de l'ouvrage (chapitre 3, §. 5.3).

3) Coefficient d'amortissement relatif ξ et coefficient topographique τ (chapitre 3, §. 5.9.2 et 5.7)

Pour un contreventement assuré par des voiles :
- en béton armé : $\xi = 4\ \%$
- en béton non armé : $\xi = 3\ \%$

D'où : $\rho = \left(\dfrac{5}{\xi}\right)^{0,4}$.

Pour un terrain horizontal : $\tau = 1$, sinon se reporter à l'article 5.24 des *Règles PS 92*.

4) Coefficient de comportement q (chapitre 3, §. 5.9.4)

On pourra retenir $q = 3{,}5$ pour un contreventement par voiles.
Pour $T < 0{,}05\ s$, remplacer q par $q' = 1 + 20\,(q - 1)\,T$

5) Accélération spectrale R(T) (chapitre 3, §. 5.9.5)

$$R(T) = a_N\, \tau\, \rho\, R_D(T)$$

avec $R_D(T)$ = accélération normalisée (chapitre 3, fig. 65)

6) Force statique équivalente f_r

$$f_r = \rho_{\mu}\, m_r\, z_r^{\alpha} \frac{\sum m_i z_i^{\alpha}}{\sum m_i z_i^{2\alpha}} \frac{R(T)}{q}$$

avec :
r = rang du niveau étudié
z_i et z_r = cotes des niveaux de rangs i et r
m_i et m_r = masses des niveaux de rangs i et r
$\alpha = 1{,}5$

$$\rho_{\mu} = 1 + 0{,}10 \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \geqslant 1{,}10 \quad \text{pour un contreventement par voiles}$$

T_c = période de base lue dans le tableau du chapitre 3, §. 5.9.5 en fonction du site.

7) Masses à prendre en compte

$\varnothing$ = coefficient de prise en compte :
- charges permanentes : $\varnothing = 1$
- charges d'exploitation :

– bâtiment d'habitation ou d'hébergement, bureaux ou assimilés	$\varnothing = 0{,}20$
– halles diverses, salles d'exposition ou autres locaux destinés principalement au transit des personnes, salles de réunion, lieux de cultes, salles et tribunes de sport, salles de danse et tout autre lieu avec place debout et utilisation périodique	$\varnothing = 0{,}25$
– salles de classe, restaurants, dortoirs, salles de réunion avec places assises	$\varnothing = 0{,}40$
– archives, entrepôts	$\varnothing = 0{,}80$
– autres locaux (sauf industriels)	$\varnothing = 0{,}65$

charges de neige :
. pour une altitude $\leqslant$ 500 m : $\varnothing = 0{,}00$
. pour une altitude $>$ 500 m : $\varnothing = 0{,}30$

8) Combinaisons des sollicitations de même direction

Pour le cas où, en plus de l'action du séisme E, il n'y a que des charges permanentes G, d'exploitation Q et de neige N, on a :

$$S = G + E + 0{,}8\ Q + 0{,}1\ N$$
$$S = G + E + 0{,}3\ N$$
$$S = G + E + \Psi_1\ N + 0{,}4\ Q$$

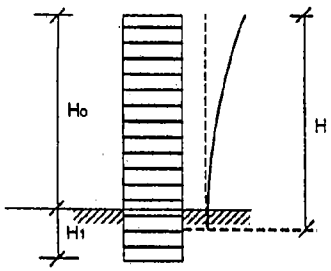
avec $\Psi_1 = 0{,}15$ si altitude $\leqslant$ 500 m et $\Psi_1 = 0{,}30$ si altitude $>$ 500 m.

9) Combinaisons de sollicitations de directions différentes

$$S = \pm S_x \pm \lambda\, S_y \pm \mu\, S_z$$
$$S = \pm \lambda\, S_x \pm S_y \pm \mu\, S_z$$
$$S = \pm \lambda\, S_x \pm \mu\, S_y \pm S_z$$

Cependant :
- la composante verticale peut être généralement négligée ($\mu = 0$ et 3e équation négligée) sauf dans des cas particuliers tels que transparence à un niveau (par exemple le voile s'arrête au plancher haut du rez-de-chaussée) ou pendule inversé (étages supérieurs plus larges que les étages inférieurs) ;
- les composantes horizontales peuvent être considérées séparément ($\lambda = 0$ et $\mu = 0$, 3e équation négligée) pour les constructions régulières (ce qui est le cas pour les limites d'emploi du programme « CONTREV »).

10) Hauteur de calcul H à prendre en compte pour la console



Compte tenu de l'encastrement du bâtiment dans le sol H_1 et de la hauteur libre au-dessus du sol H_0 :

$H = H_0$ pour bâtiment fondé sur rocher ou sol de catégorie *a* (chapitre 3, §. 5.8.2)
$H = H_0 + 0{,}5\ H_1 \leqslant 1{,}5\ H_0$ pour sol de catégorie *b*
$H = H_0 + H_1 \leqslant 2\ H_0$ pour sol de catégorie *c*

Fig. 47 – Encastrement dans le sol.

11) Déformations admissibles

- déformation totale sur la hauteur H : $< H / 250$;
- déformation locale entre 2 niveaux consécutifs distants de h : $< h / 100$.

12) Déformation à prendre en compte

Au niveau r : $d_r = \rho_n\, z_r^{\alpha} \dfrac{\sum m_i z_i^{\alpha}}{\sum m_i z_i^{2\alpha}} \left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 R(T)$.

13) Conditions pour qu'un bâtiment soit considéré comme régulier

a - Rapport des côtés L_x / L_y compris entre 0,2 et 5
b - Excentricité $e_0 \leqslant 0{,}15\ r$
avec $r \geqslant 0{,}2\ L_x$ (ou L_y)

$$r^2 = \frac{\sum I_{xi}\, x_i^2 + \sum I_{yi}\, y_i^2}{\sum I_{xi}}$$

x_i = abscisse du centre de torsion du voile i par rapport au centre de torsion général, pour un séisme parallèle à Oy.

14) Matériaux

- Acier : $\gamma_s = 1$.
- Béton : $\gamma_b = 1{,}3$.
- Résistance de calcul : $f_{bu} = \dfrac{0{,}85 f_{cj}}{1{,}15 \gamma_b}$.

15) Actions verticales

- Remplacer q par Max [1 ; q/2].
- Pour $R_D(T)$ de sites S_1, S_2 ou S_3, prendre le spectre du site S_1.
- Dans tous les cas, multiplier $R_D(T)$ par 0,7.

5.7.4. Mode d'emploi du programme « CONTREV » *

Ce programme calcule le contreventement de bâtiments dont la résistance au vent ou au séisme est assurée par des voiles composés de rectangles formant un ensemble monolithe. La méthode utilisée est celle du centre de torsion.

La géométrie en plan est décrite à partir d'une origine quelconque (de préférence le coin inférieur gauche du bâtiment pour la clarté du dessin sur écran) et de deux axes perpendiculaires correspondant aux deux directions du vent.

Le calcul dans les deux directions est effectué automatiquement au moyen des combinaisons de cas de charge. La première moitié de ces combinaisons correspond à une action (vent ou séisme) parallèle à Oy, la deuxième moitié à une action parallèle à Ox.

La méthode suppose que les inerties sont constantes sur toute la hauteur ou bien qu'elles varient toutes de la même proportion aux mêmes niveaux.

Le programme effectue successivement un calcul au vent puis au séisme, s'il existe, suivant les *Règles NV 65* pour le vent et les *Règles PS 69* ou *PS 92* au choix pour le séisme.

Ligne 1 **Titre**

Ligne 2 $I_{sv}, L_x, L_y, H, T_x, T_y, x_o, y_o$
- I_{sv} = 0 pour vent NV 65 seul
  = 1 pour vent NV 65 + séisme PS 92
  = 2 pour vent NV 65 + séisme PS 69
- L_x = largeur du bâtiment parallèlement à Ox (m)
- L_y = largeur du bâtiment parallèlement à Oy (m)
- H = hauteur totale du bâtiment (m)
- T_x = période de vibration (1er mode) pour un vent parallèle à Oy (s)
- T_y = période de vibration (1er mode) pour un vent parallèle à Ox (s)

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées.

Si la période introduite est nulle, le programme prend la valeur forfaitaire :

$T = 0{,}08 \frac{H}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{H}{L+H}}$ pour des contreventements par voiles en béton armé

x_o et y_o : coordonnées en m du coin inférieur gauche de la vue en plan du bâtiment (pour le dessin)

Ligne 3 **Région, Site , C_x, C_y, x_V, y_V**

Région :
1 = 50 kN/m²
2 = 70 kN/m²
3 = 90 kN/m²

Site :
1 = site normal
< 1 = site protégé (voir NV 65)
> 1 = site exposé (voir NV 65)

Pour un calcul sans vent, faire Site = 0

C_x = coefficient de forme des Règles NV 65 pour un vent parallèle à Oy

C_y = coefficient de forme des Règles NV 65 pour un vent parallèle à Ox

Remarque

Pour un bâtiment rectangulaire et si $H/L_x \geq 0{,}5$, $H/L_y \geq 0{,}5$ et $1/3 \leq L_x/L_y \leq 3$, on a C = 1,3

x_V = abscisse du centre de poussée du vent parallèle à Oy et agissant sur la face parallèle à Ox (m)

y_V = ordonnée du centre de poussée du vent, parallèle à Ox et agissant sur la face parallèle à Oy (m)

Ligne 4 **Site, a_N, ξ, τ, q**

(si Isv=1) Pour les PS 92 :

Site :
= 0 pour le site S_0
= 1 pour le site S_1
= 2 pour le site S_2
= 3 pour le site S_3

a_N = accélération nominale en m/s²

ξ = coefficient d'amortissement en % ; on peut prendre ξ = 4 pour le béton armé et ξ = 3 pour le béton non armé

τ = coefficient topographique qui vaut 1 en général sauf pour les ouvrages en bord de crête (voir PS 92, §. 5.24)

q = coefficient de comportement
= 3,5 pour les bâtiments contreventés par voiles.

Ligne 5 **Sol, α, δ, Amort**

(si Isv=2) Pour les PS 69

Sol :
= 0 si la construction n'est pas sur une importante formation de sols meubles
= 1 si la construction est sur une importante formation de sols meubles

α = coefficient d'intensité (voir chapitre 3, §.5.14.3 ci-dessus)

δ = coefficient de fondation (voir chapitre 3, §.5.14.7 ci-dessus)

Amort :
= 0 pour un amortissement faible
= 1 pour un amortissement moyen
= 2 pour un amortissement normal

Ligne 6 f_c, f_e

$f_c = f_{c28}$ du béton (MPa)

f_e = limite élastique de l'acier (MPa)

Ligne 7 $i, j, h, L_{x1}, L_{y1}, x_0, y_0$, (G, e_{gx}, e_{gy}, Q, e_{qx}, e_{qy}, Ø)

Du niveau i au niveau j, h = hauteur de l'étage (m) à décrire à partir du bas.

Les numéros négatifs de niveaux sont ceux qui sont à l'abri du vent (sous-sol par exemple).

L_{x1} = largeur (m) parallèlement à Ox, si elle est différente de la valeur générale L_x de la ligne 2, sinon $L_{x1} = 0$ (pour un édicule en terrasse ou un amincissement par exemple).

L_{y1} = largeur (m) parallèlement à Oy, si elle est différente de la valeur générale L_y de la ligne 2, sinon $L_{y1} = 0$.

Il est supposé que le centre de poussée du vent reste sur la même verticale.

x_0 et y_0 : coordonnées en m du coin inférieur gauche de la vue en plan du bâtiment (pour le dessin) si elles sont différentes de la valeur commune de la la ligne 2, sinon écrire 0,0.

Ce qui suit n'est à écrire que s'il y a séisme (Isv = 1 ou 2).

G = masse totale (t) correspondant aux charges permanentes du plancher

e_{gx} et e_{gy} = coordonnées (m) du centre de gravité de la masse G suivant Ox et Oy.

Q = masse totale (t) correspondant aux charges d'exploitation du plancher.

e_{qx} et e_{qy} = coordonnées (m) du centre de gravité de la masse Q suivant Ox et Oy.

Ø = coefficient de prise en compte des charges d'exploitation Q (Pour les bâtiments d'habitation et de bureaux, on prendra Ø = 0,2).

Fin = 0,0,0

Ligne 8 $i, j, N_v, k_G, k_Q, f_{c1}$

Du niveau i au niveau j, N_v = nombre de voile par niveaux. A décrire en descendant à partir du sommet ($i \leq j$).

Si les charges permanentes des niveaux i à j sont proportionnelles à celles du niveau au-dessus, décrites antérieurement, le coefficient de proportionnalité est égal à k_G.

De même, pour les charges variables.

f_{c1} = résistance caractéristique du béton si différent de f_c de la ligne 6.

EXEMPLES

1. si pour l'ensemble du niveau 13 (terrasse), premier niveau décrit, la charge permanente vaut 6.62 kN/m², et si la charge permanente du niveau 12 vaut

6.31 kN/m², on indiquera $k_G = 6.31 / 6.62 = 0.953$ pour le niveau 12.

2. Pour une dégression des charges d'exploitation, avec un coefficient 1 pour le niveau 12 ; 0,9 pour le niveau 11 ; 0,8 pour le niveau 10 ; 0,7 pour le niveau 9 ; 0,6 pour le niveau 8 etc., on aura (pour 3 voiles).

13 , 13 , 3 , 0 , 0 , 0	pour la terrasse (Niveau 13) et dont on décrira la géométrie des voiles et les charges en lignes 9 à 12 (q = 1 kN/m²)
12 , 12 , 3 , 0.953 , 4 , 0	niveau 12 : avec 4 kN/m² au lieu de 1 kN/m² de charges d'exploitation, coefficient 4 pour la charge d'exploitation qui est 4 fois plus grande que la charge décrite en clair (celle du niveau 13). On omettra de décrire les lignes 9 à 12 et on reviendra à une nouvelle ligne 8
11 , 11 , 3 , 1 , 3.6 , 0	niveau 11 : avec mêmes charges permanentes et une charge d'exploitation multipliée par 0,9 0,9 × 4 = 3,6
10 , 10 , 3 , 1 , 3.2 , 0	niveau 10 : avec mêmes charges permanentes et une charge d'exploitation multipliée par 0,8 0,8 × 4 = 3,2
9 , 9 , 3 , 1 , 2.8 , 0	niveau 9 : avec mêmes charges permanentes et une charge d'exploitation multipliée par 0,7 0,7 × 4 = 2,8
8 , 8 , 3 , 1 , 2.4 , 0	niveau 8 : avec mêmes charges permanentes et une charge d'exploitation multipliée par 0,6 × 4 = 2,4 etc.

Le coefficient s'applique à la dernière charge décrite, celle de la ligne 10.
Fin = 0,0,0

Ligne 9 k, N_r, Type, $I_{éqx}$, $I_{éqy}$

(N_v fois) k = numéro du voile (de 1 à N_v)
N_r = nombre de rectangles constituant le voile
Type (Fig. 48) :
1 = si le voile est constitué d'une suite unicursale de rectangles
2 = si le voile comporte des affluents. A décrire en ligne 11
3 = si le voile est constitué de rectangles tous concourants. On introduira alors les coordonnées du point de concours en ligne 12.

Remarque
Pour un voile en T, on pourrait aussi utiliser le type 2, mais il faudrait décrire 3 rectangles au lieu de 2.

$I_{éqx}$ = inertie équivalente (m⁴) par rapport à l'axe parallèle à Ox passant par le centre de gravité du voile, si différente de l'inertie calculée.
$I_{éqy}$ = inertie équivalente (m⁴) par rapport à l'axe parallèle à Oy passant par le centre de gravité du voile, si différente de l'inertie calculée.

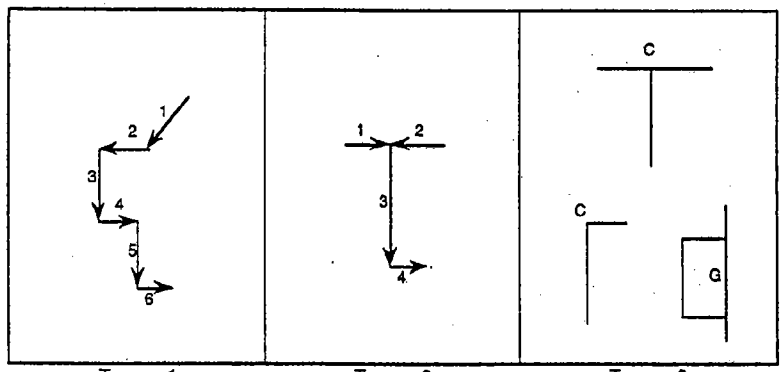


Fig. 48 – Types de voiles.

Ligne 10 i, t, h, a, b, φ, G, e_G, Q, e_Q, I_r

(N_r fois) i = numéro du rectangle (i = 1 à N_r)
t = épaisseur du rectangle (m)
h = longueur du rectangle (m)
a = abscisse du centre du rectangle (m)
b = ordonnée du centre du rectangle (m)
φ = angle (degrés) de l'axe principal du rectangle avec l'axe Oy (Fig. 49) :
φ = (Oy, axe du rectangle)
L'axe du rectangle est orienté dans le sens de la description, c'est-à-dire du rectangle précédent vers le rectangle suivant.
G = charges permanentes (kN), autres que le poids propre du voile (qui est calculé automatiquement).
e_G = excentricité (m) de la charge permanente ci-dessus par rapport au centre du rectangle, comptée positivement dans le sens de la flèche de description.
Q = charges variables (kN).
e_Q = excentricité (m) de la charge variable ci-dessus par rapport au centre du rectangle, comptée positivement dans le sens de la flèche de description.
I_r = 1 pour un voile ne supportant de plancher que d'un seul côté, = 2 pour deux planchers.

A écrire N_r fois, puis retour vers une autre ligne 9.

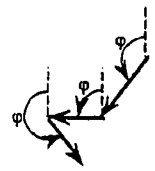


Fig. 49 – Angles de rectangles successifs.

Ligne 11 $i, j_1, j_2, j_3, \ldots, 0$
(si Type = 2) i = numéro du rectangle décrit
(N_r lignes) $j_1, j_2, j_3, \ldots$ liste des rectangles repris par le rectangle i.
Pour chaque rectangle, indiquer sur la même ligne les numéros des rectangles amont reçus directement par ce rectangle. Terminer la ligne par un 0.
Par exemple, pour le type 2 de la figure 48 ci-dessus, on aura 4 lignes :

```
1,0       ' le rectangle n'en reçoit aucun autre
2,0       ' dito pour le rectangle 2
3,1,2,0   ' le rectangle 3 reçoit les rectangles 1 et 2
4,3,0     ' le rectangle 4 reçoit le rectangle 3
```

Ligne 12 x_c, y_c
(si Type = 3) x_c = abscisse du centre de torsion, point de concours des rectangles (m)
y_c = ordonnée du centre de torsion, point de concours des rectangles (m)
Si les deux valeurs x_c et y_c sont nulles, le programme placera le centre de torsion du voile en son centre de gravité. Ce peut être le cas pour un voile ne correspondant ni au type 1, ni au type 2 et dont on ignore la position du centre de torsion.

Retour en ligne 9.

Résultats

Pour chaque direction, le programme donne :
- le tableau du vent global et de l'action horizontale du séisme à chaque niveau : force, effort tranchant, moment ;
- pour chaque groupe de niveaux, le rappel des données des dimensions et charges de chaque rectangle de chaque voile ;
- pour chaque niveau et chaque voile, les sollicitations (effort normal, effort tranchant et moment) dans chaque direction dues aux charges permanentes, charges d'exploitation et au vent ;
- pour chaque niveau et pour cinq points de chaque rectangle de chaque voile :
  - les coordonnées du point,
  - la contrainte maximale du béton en compression pour toutes les combinaisons de cas de charges,
  - le rapport maximal de la contrainte réelle sur la contrainte limite,
  - la contrainte minimale du béton,

  - le cisaillement maximal,
  - la section, le diamètre et l'espacement des aciers verticaux nécessaires par mètre linéaire de voile,
  - la section, le diamètre et l'espacement des aciers horizontaux nécessaires par mètre linéaire de voile,
- en fin de calcul, le maximum de :
  - la contrainte de compression du béton,
  - du rapport contrainte réelle/contrainte limite,
  - du pourcentage d'acier vertical,
  - le ferraillage vertical, horizontal et transversal tenant compte du décalage vers le haut des aciers tendus de 0,8 fois la longueur du voile,
  - les quantités de béton, de coffrage et d'acier.

Remarques

1. Pour des voiles avec files d'ouvertures, on déterminera les coefficients α et l'inertie équivalente par le programme « LINTEAUX ». Si un coefficient α est inférieur à 1, on considérera que l'ouverture est de grande dimension et que les deux ensembles de rectangles situés de part et d'autre sont indépendants et forment deux voiles distincts. Si tous les coefficients α sont tous supérieurs à 10, on pourra considérer le voile comme monolithe en ne décrivant que les rectangles pleins (à l'exception des ouvertures).
En cas d'introduction d'inertie équivalente, on procédera à un nouveau passage avec le programme « LINTEAUX » pour déterminer les contraintes et aciers de chacun des éléments composant le voile. On introduira comme valeur de l'effort en pied, les deux valeurs V_0 et V_1 (effort horizontal cumulé dus à la partie constante du vent et à la partie triangulaire du vent qui est supposé être trapézoïdal). Ces valeurs V_0 et V_1 sont données par les formules (voir en 6.1 ci-après) :

$$V_0 = 4\,V - \frac{6M}{H} \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{6M}{H} - 3\,V$$ en fonction des moment M et

effort tranchant V dus au vent au niveau le plus bas.

2. La numérotation des voiles doit être faite en tenant compte de ce qu'un numéro est réservé au même voile de haut en bas.
S'il apparaît un ou plusieurs voiles, les numéros de ces voiles doivent être les derniers.

3. Lorsque les dimensions d'un voile changent d'un niveau à l'autre, et que le centre de gravité change de position, le programme calcule les moments dus à ces excentrements de charge.

4. Quand les ouvertures varient de façon importante d'un niveau à l'autre, il convient de regarder avec attention le cheminement des efforts (verticaux et moments) par des corrections manuelles. Le programme donnant les efforts globaux de vent et de charges verticales pour le voile, on peut déterminer la répartition en fonction des ouvertures, puis les contraintes et les aciers nécessaires.

5. On peut modifier l'action du vent pour des pressions de base différentes des trois régions NV 65 en jouant sur le coefficient « Site » de la ligne 2.

6. Les contraintes du béton sont calculées par la formule :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_x v_y}{I_x} + \frac{M_y v_x}{I_y}$$

En cas de traction les aciers verticaux sont déterminés comme reprenant l'effort que reprendrait le béton tendu s'il résistait à la traction et correspondant à la valeur de la contrainte de traction la plus élevée de chaque quart de rectangle (DTU).

7. Que l'on utilise ou non l'inertie équivalente, les sollicitations, contraintes et aciers dans les voiles sont calculés en supposant ces derniers comme des consoles encastrées dans leurs bases.

8. On limitera la largeur des ailes au 1/10 de la hauteur totale du voile.

9. Les sorties de ferrailllage du tableau final tiennent compte du décalage de 0,8 L vers le haut des aciers tendus. Les aciers transversaux (épingles) sont calculés à partir des seuls aciers comprimés.

10. Pour le séisme, les résultats ne sont valables que pour des bâtiments réguliers tels que définis à l'article 6.612 des *Règles PS 92* :

- les effets de la composante verticale sont négligés ;
- en général, les composantes horizontales sont considérées séparément l'une de l'autre ; cependant, on peut, si nécessaire, les prendre en compte de façon simultanée en modifiant les coefficients de combinaisons (voir sous-programme aux 3/4 du listing) ;
- les conditions du 6.612 sont vérifiées automatiquement par le programme, à savoir :

$e_n \leq 0{,}20\, r$ (pour les deux sens x et y)

$r \geq 0{,}2\, L$ (pour les deux sens x et y)

$$r^2 \geq \frac{L_x^2 + L_y^2}{8} \quad \text{(pour les deux sens } x \text{ et } y\text{)}$$

$$0{,}25 \leq \frac{L_x}{L_y} \leq 4 \quad \text{(pour les deux sens } x \text{ et } y\text{)}$$

- les autres conditions sont à vérifier manuellement.

11. On peut sauvegarder les résultats du calcul dans un fichier appelé « BIDOUT » lisible sous Word. Il suffit pour cela de remplacer tous les PRINT du programme par PRINT #1, (ne pas oublier la virgule à la fin). Après exécution de « CONTREV », on ouvre « BIDOUT » sous Word que l'on peut lire en modifiant la police en Monaco taille 9 (ou Courrier taille 9). Pour obtenir une sortie sur imprimante, procéder au remplacement de tous les PRINT par LPRINT.

5.7.5. Données du programme pour l'exemple étudié

Titre
Immeuble A

l_{sv}	L_x	L_y	H	T_x	T_y	x_o	y_o
0	24,2	24,2	47,25	0	0	–0.1	–12.1

Région	Site	C_x	C_y	x_v	y_v
3	1	1,3	1,3	12,1	0

f_c	f_e
25	500

i	j	h	L_{x1}	L_{y1}	x_o	y_o
0	11	3,15	0	0	0	0
0	0	0				

i	j	N_v	k_G	k_Q	f_{c1}
11	11	3	0	0	0

k	N_r	Type	$l_{éqx}$	$l_{éqv}$
1	4	1	0	0

N°	t	h	a	b	φ	G	e_G	Q	e_Q	l_r
1	0,5	0,3	6	11,85	0	73,84	–0,15	9	–0,15	2
2	0,2	6	3	12	90	104,9	–1,18	13,5	–1,08	1
3	0,2	6	0	9	180	104,9	1,18	13,5	1,08	1
4	0,5	0,3	0,15	6	–90	73,84	0,15	9	0,15	2

k	N_r	Type	$l_{éqx}$	$l_{éqv}$
2	9	2	0	0

N°	t	h	a	b	φ	G	e_G	Q	e_Q	l_r
1	0,2	0,4	18	1,6	0	64,01	0,237	8,194	0,234	1
2	0,2	2,2	19,1	1,8	–90	8,98	0	1,21	0	1
3	0,2	1,8	20,2	0,9	180	71,14	–0,62	9,155	–0,61	1
4	0,2	0,4	18	–0,2	0	3,091	–0,15	0,455	–0,15	1
5	0,2	0,4	18	0,2	180	3,091	–0,15	0,455	–0,15	1
6	0,2	2,2	19,1	0	–90	71,19	–1,2	9	–1,2	1
7	0,2	1,8	20,2	–0,9	180	71,14	0,62	9,155	0,61	1
8	0,2	2,2	19,1	–1,8	90	8,98	0	1,21	0	1
9	0,2	0,4	18	–1,6	0	64,01	0,237	8,194	0,234	1

i	j_1	j_2	j_3	j_4
1	0			
2	1	0		
3	2	0		
4	0			
5	0			
6	4	5	0	
7	3	6	0	
8	7	0		
9	8	0		
3	4	1	0	0

N°	t	h	a	b	φ	G	e_G	Q	e_Q	l_r
1	0,5	0,3	6	−11,85	180	73,84	−0,15	9	−0,15	2
2	0,2	6	3	−12	90	104,9	−1,18	13,5	−1,08	1
3	0,2	6	0	−9	0	104,9	1,18	13,5	1,08	1
4	0,5	0,3	0,15	−6	−90	73,84	0,15	9	0,15	2

i	j	N_v	k_G	k_Q	f_{e1}
10	0	3	0,701	3	0
0	0	0			

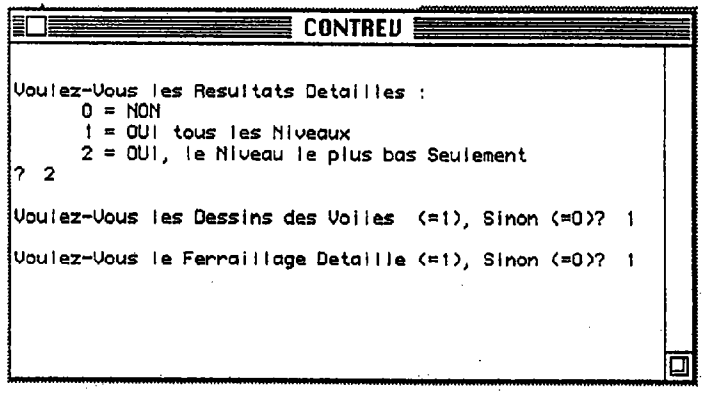
5.7.6. Résultats du programme « CONTREV »

Les sorties sont composées de :

- la répétition des données ;
- le calcul des efforts globaux de vent ;
- le dessin des voiles (sur option) avec leurs centres de gravité (croix) et centres de torsion (rond creux), le centre de torsion global (cercle plein), le contour du bâtiment (pointillé), les axes de coordonnées (tireté) ;
- le détail (sur option) des contraintes de compression, traction et cisaillement, des aciers (sections en cm^2, diamètres et espacements) des quatre quarts de chaque rectangle de chaque voile à chaque niveau ;
- les maxima des contraintes et pourcentages d'acier et indication du rectangle, voile et niveau ;

- les maxima des contraintes et pourcentages d'acier et indication du rectangle, voile et niveau ;
- le ferraillage enveloppe (sur option) des 6 cas de charges avec positions, diamètres, espacements et longueurs ;
- le quantitatif béton, coffrage et aciers longitudinaux, horizontaux et transversaux éventuels (épingles).

5.7.6.1. Répétition des données


CONTREV
Voulez-Vous les Resultats Detailles :
0 = NON
1 = OUI tous les Niveaux
2 = OUI, le Niveau le plus bas Seulement
? 2
Voulez-Vous les Dessins des Voiles (=1), Sinon (=0)? 1
Voulez-Vous le Ferraillage Detaille (=1), Sinon (=0)? 1

a - Données générales et de vent

```
Immeuble A
Repetitions des Donnees
-----------------------
Dimensions du Batiment :
       Parallelement a Ox  = 24.200 m
       Parallelement a Oy  = 24.200 m
       Abs.Coin Inf.Gauche = -0.100 m
       Ord.Coin Inf.Droit  =-12.100 m
       Hauteur Totale      = 37.800 m
Periode de Vibration Propre :
       Vent ou Seisme parallele a Oy = 0.625 s
       Vent ou Seisme parallele a Ox = 0.625 s

VENT selon NV65
---------------
Region : 3                Site = 1.000
Coefficient de Forme C (NV65)  = 1.300 (Vent parallele a Oy)
Coefficient de Forme C (NV65)  = 1.300 (Vent parallele a Ox)
Coordonnees de la Resultante de Vent :
       Abscisse pour le Vent Parallele a Oy = 12.100 m
```

Ordonnee pour le Vent Parallele a Ox = 0.000 m

Action globale du Vent parallele a Oy

No	hi	h	Larg.	kh	delta	tau	beta	qv	Fi	Vi	Mi
	m	m	m					kN/m2	kN	kN	kNm
11	3.15	37.8	24.200	1.426	0.808	0.320	1.000	1.349	102.8	102.8	162
10	3.15	34.7	24.200	1.391	0.797	0.325	1.000	1.296	98.8	201.6	641
9	3.15	31.5	24.200	1.352	0.785	0.330	1.000	1.242	94.7	296.3	1426
8	3.15	28.4	24.200	1.312	0.780	0.335	1.000	1.196	91.2	387.5	2503
7	3.15	25.2	24.200	1.268	0.780	0.340	1.000	1.156	88.1	475.7	3862
6	3.15	22.1	24.200	1.220	0.780	0.344	1.000	1.113	84.8	560.5	5494
5	3.15	18.9	24.200	1.169	0.780	0.347	1.000	1.066	81.3	641.8	7388
4	3.15	15.8	24.200	1.114	0.780	0.350	1.000	1.016	77.4	719.2	9532
3	3.15	12.6	24.200	1.054	0.780	0.351	1.000	0.961	73.3	792.5	11913
2	3.15	9.5	24.200	0.988	0.780	0.360	1.000	0.901	68.7	861.2	14517
1	3.15	6.3	24.200	0.916	0.780	0.360	1.000	0.836	63.7	924.9	17330
0	3.15	3.2	24.200	0.837	0.780	0.360	1.000	0.764	58.2	983.1	20336

Action globale du Vent parallele a Ox

No	hi	h	Larg.	kh	delta	tau	beta	qv	Fi	Vi	Mi
	m	m	m					kN/m2	kN	kN	kNm
11	3.15	37.8	24.200	1.426	0.808	0.320	1.000	1.349	102.8	102.8	162
10	3.15	34.7	24.200	1.391	0.797	0.325	1.000	1.296	98.8	201.6	641
9	3.15	31.5	24.200	1.352	0.785	0.330	1.000	1.242	94.7	296.3	1426
8	3.15	28.4	24.200	1.312	0.780	0.335	1.000	1.196	91.2	387.5	2503
7	3.15	25.2	24.200	1.268	0.780	0.340	1.000	1.156	88.1	475.7	3862
6	3.15	22.1	24.200	1.220	0.780	0.344	1.000	1.113	84.8	560.5	5494
5	3.15	18.9	24.200	1.169	0.780	0.347	1.000	1.066	81.3	641.8	7388
4	3.15	15.8	24.200	1.114	0.780	0.350	1.000	1.016	77.4	719.2	9532
3	3.15	12.6	24.200	1.054	0.780	0.351	1.000	0.961	73.3	792.5	11913
2	3.15	9.5	24.200	0.988	0.780	0.360	1.000	0.901	68.7	861.2	14517
1	3.15	6.3	24.200	0.916	0.780	0.360	1.000	0.836	63.7	924.9	17330
0	3.15	3.2	24.200	0.837	0.780	0.360	1.000	0.764	58.2	983.1	20336

Coefficients des Combinaisons de Cas de Charges

Cas	Perm.	Exploit.	Vent//Oy	Vent //Ox
1	1.35	1.00	1.80	0.00
2	1.35	1.00	-1.80	0.00
3	1.35	1.50	1.20	0.00
4	1.35	1.50	-1.20	0.00
5	1.00	0.00	1.80	0.00
6	1.00	0.00	-1.80	0.00
7	1.35	1.00	0.00	1.80
8	1.35	1.00	0.00	-1.80
9	1.35	1.50	0.00	1.20
10	1.35	1.50	0.00	-1.20
11	1.00	0.00	0.00	1.80
12	1.00	0.00	0.00	-1.80

b - Données de chaque niveau ou groupe de niveau (exemple pour les niveaux 10 à 0)

Caracteristiques des Voiles (donnees)

Les Niveaux 10 a 0 comportent 3 Voiles

Voile	N°	t	h	a	b	phi	Ng	eg	Nq	eq	Plancher
1	1	0.500	0.300	6.000	11.850	0.00	73.84	-0.150	9.00	-0.150	2 Cotes
	2	0.200	6.000	3.000	12.000	90.00	104.90	-1.180	13.50	-1.080	1 Cote
	3	0.200	6.000	0.000	9.000	180.00	104.90	1.180	13.50	1.080	1 Cote
	4	0.500	0.300	0.150	6.000	-90.00	73.84	0.150	9.00	0.150	2 Cotes
2	1	0.200	0.400	18.000	1.600	0.00	64.01	0.237	8.19	0.234	1 Cote
	2	0.200	2.200	19.100	1.800	-90.00	8.98	0.000	1.21	0.000	1 Cote
	3	0.200	1.800	20.200	0.900	180.00	71.14	-0.620	9.15	-0.610	1 Cote
	4	0.200	0.400	18.000	-0.200	0.00	3.09	-0.150	0.46	-0.150	1 Cote
	5	0.200	0.400	18.000	0.200	180.00	3.09	-0.150	0.46	-0.150	1 Cote
	6	0.200	2.200	19.100	0.000	-90.00	71.19	-1.200	9.00	-1.200	1 Cote
	7	0.200	1.800	20.200	-0.900	180.00	71.14	0.620	9.15	0.610	1 Cote
	8	0.200	2.200	19.100	-1.800	90.00	8.98	0.000	1.21	0.000	1 Cote
	9	0.200	0.400	18.000	-1.600	0.00	64.01	-0.237	8.19	-0.234	1 Cote

Le Rectangle reprend les No			
1	1		
2	2	1	
3	3	2	
4	4		
5	5		
6	6	4	5
7	7	3	6
8	8	7	
9	9	8	

Voile	N°	t	h	ab	phi	Ng	eg	Nq	eq	Plancher
3	1	0.500	0.300	6.000	-11.850	180.00	73.84	-0.150	9.00	-0.150	2 Cotes
	2	0.200	6.000	3.000	-12.000	90.00	104.90	-1.180	13.50	-1.080	1 Cote
	3	0.200	6.000	0.000	-9.000	0.00	104.90	1.180	13.50	1.080	1 Cote
	4	0.500	0.300	0.150	-6.000	-90.00	73.84	0.150	9.00	0.150	2 Cotes

Voile	C. de Gravite(m)		C. de Torsion(m)		Aire	Inerties (m4)	
No	xG	yG	xC	yC	(m2)	/Ox	/Oy
1	1.675	10.325	-0.040	12.040	2.7000	12.2364	12.2364
2	19.286	-0.000	21.247	-0.000	2.3600	4.0535	1.7122
3	1.675	-10.325	-0.040	-12.040	2.7000	12.2364	12.2364

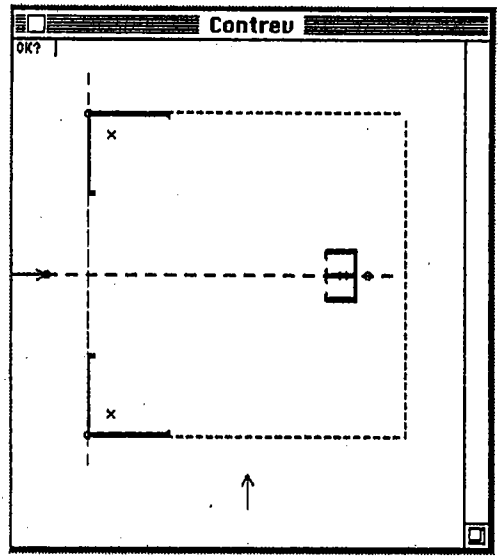
Centre de Torsion : x = -3.182 m y = -0.000 m
Centre de Poussee : x = 12.100 m y = 0.000 m
Excentricite : ex =15.282 m ey = 0.000 m (ex/Lx = 0.631 ey/Ly = 0.000)

Remarque

Le centre de torsion est fortement excentré, et même en dehors du bâtiment. Ce qui entraîne d'importants moments de torsion. Cette solution est vivement déconseillée pour un calcul

parasismique. Dans ce cas, on ajoutera deux voiles cornières dans les deux autres angles pour rapprocher le centre de torsion du centre de poussée.

c - Dessin des voiles



5.7.6.2. Résultats détaillés (exemple pour le niveau le plus bas)

Pour le Niveau 0

Sollicitations Elementaires

Voile No	Eff.Tr.Vent //Oy kN	//Ox kN	Moments Vent /Ox kNm	/Oy kNm	Ch.Per. dont pp Voile kN	kN	Mom.Ch.Per. /Ox kNm	/Oy kNm	Ch.Var. kN	Mom.Ch.Var. /Ox kNm	/Oy kNm
		(1ereligne:Vent//Oy)									
		(2emeligne:Vent//Ox)									
1	275.9	-114.4	5707.8	-2366.9	5616.1	2500.5	1130.8	1894.2	1530.0	515.6	863.6
	274.3	459.4	5673.3	9502.9							
2	431.2	0.0	8920.0	0.0	5372.2	2185.6	0.0	265.0	1599.0	0.0	120.8
	0.0	64.3	0.0	1329.7							
3	275.9	114.4	5707.8	2366.9	5616.1	2500.5	-1130.8	1894.2	1530.0	-515.6	863.6
	-274.3	459.4	-5673.3	9502.9							

Niv. No	Voil No	Eff.Tr//Oy Eff.Tr//Ox Eff.N.(kN) Cis.(MPa)	Mt/Ox Mt/Oy (kNm)	No Epai.(m) Long.(m) Angle(degre)		Extre mite 0	1/4	Centre 1/2	3/4	Extre mite 1
0	1	497	12316	1	x (m) =	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
		827	20526	0.500	y (m) =	11.70	11.78	11.85	11.93	12.00
		9877		0.300	smax (MPa) =	12.007	12.082	12.157	12.232	12.307
		0.92		0.00	% =	87.4%	88.0%	88.6%	89.2%	89.8%
					smin (MPa) =	-4.32	-4.37	-4.43	-4.48	-4.54
Cote = 3.150m, h.etag. = 3.150 m					Avc (cm2/m)=	13.41	13.54	13.68	13.81	13.95
Decalage vers le Haut de 5.040 m					Avt (cm2/m)=	49.64	50.28	50.92	51.56	52.20
					% =	0.99%	1.01%	1.02%	1.03%	1.04%
					Diametre =	HA25	HA25	HA25	HA25	HA25
					Espacement =	197	195	192	190	188
					Ah (cm2/m) =	33.10	33.52	33.95	34.38	34.80
					% =	0.66%	0.67%	0.68%	0.69%	0.70%
					Diametre =	HA20	HA20	HA20	HA20	HA20
					Espacement=	189	187	185	182	180
				2	x (m) =	6.00	4.50	3.00	1.50	0.00
				0.200	y (m) =	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00
				6.000	smax (MPa) =	12.307	9.791	7.275	5.073	5.176
				90.00	% =	98.2%	79.9%	93.9%	65.5%	66.8%
					smin (MPa) =	-4.54	-2.67	-0.81	0.74	-0.01
					Avc (cm2/m)=	6.54	4.70	0.00	0.00	0.00
Decalage vers le Haut de 5.040 m					Avt (cm2/m)=	20.88	12.30	3.73	0.00	0.00
					% =	1.04%	0.62%	0.19%	0.00%	0.00%
					Diametre =	HA16	HA12	HA8		
					Espacement =	192	183	269		
					Ah(cm2/m) =	13.92	8.20	2.48	0.00	0.00
					% =	0.70%	0.41%	0.12%	0.00%	0.00%
					Diametre =	HA14	HA10	HA6		
					Espacement =	221	191	227		
				3	x (m) =	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
				0.200	y (m) =	12.00	10.50	9.00	7.50	6.00
				6.000	smax (MPa) =	5.176	5.131	6.133	7.134	8.136
				180.00	% =	66.8%	66.2%	79.2%	92.1%	95.2%
					smin (MPa) =	-0.01	-0.36	-1.75	-3.14	-4.53
					Avc (cm2/m)=	0.00	0.00	0.00	0.00	3.44
Decalage vers le Haut de 5.040 m					Avt (cm2/m)=	0.00	1.65	8.05	14.44	20.84
					% =	0.00%	0.08%	0.40%	0.72%	1.04%
					Diametre =	HA6	HA10	HA14	HA16	
					Espacement =	333	195	213	192	
					Ah (cm2/m) =	0.00	1.10	5.36	9.63	13.89
					% =	0.00%	0.05%	0.27%	0.48%	0.69%
					Diametre =	HA6	HA8	HA12	HA14	
					Espacement =	333	187	234	221	
				4	x (m) =	0.00	0.08	0.15	0.23	0.30
				0.500	y (m) =	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
				0.300	smax (MPa) =	8.136	8.052	7.968	7.884	7.800
				-90.00	% =	70.4%	69.7%	69.0%	68.3%	67.5%

				smin (MPa) =	-4.53	-4.41	-4.30	-4.18	-4.06
				Avc(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Decalage vers le Haut de 5.040 m				Avt(cm2/m) =	52.09	50.75	49.41	48.08	46.74
				% =	1.04%	1.02%	0.99%	0.96%	0.93%
				Diametre =	HA25	HA25	HA25	HA25	HA25
				Espacement =	188	193	198	204	210
				Ah(cm2/m) =	34.73	33.84	32.94	32.05	31.16
				% =	0.69%	0.68%	0.66%	0.64%	0.62%
				Diametre =	HA20	HA20	HA20	HA20	HA20
				Espacement =	180	185	190	196	201
0	2	776	16056	1	x (m) =	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00
		116	2872	0.200	y (m) =	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80
		9651		0.400	smax (MPa) =	8.936	9.333	9.729	10.125	10.521
		1.12		0.00%	=	84.9%	88.7%	92.5%	96.2%	100.0%
					smin (MPa) =	-3.47	-3.86	-4.26	-4.66	-5.05
					Avc(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	
Decalage vers le Haut de 5.280 m					Avt(cm2/m) =	15.95	17.78	19.60	21.42	23.24
					% =	0.80%	0.89%	0.98%	1.07%	1.16%
					Diametre =	HA14	HA14	HA16	HA16	HA16
					Espacement =	192	173	205	187	173
					Ah(cm2/m) =	10.64	11.85	13.07	14.28	15.49
					% =	0.53%	0.59%	0.65%	0.71%	0.77%
					Diametre =	HA12	HA12	HA12	HA14	HA14
					Espacement =	212	190	173	215	198
				2	x (m) =	18.00	18.55	19.10	19.65	20.20
				0.200	y (m) =	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80
				2.200	smax (MPa) =	10.521	10.675	10.828	10.982	11.136
				-90.00	% =	97.2%	98.1%	99.0%	99.9%	96.4%
					smin (MPa) =	-5.05	-4.97	-4.88	-4.80	-4.71
					Avc(cm2/m) =	4.16	4.26	4.36	4.46	4.56
Decalage vers le Haut de 5.280 m					Avt(cm2/m) =	23.24	22.85	22.46	22.07	21.68
					% =	1.16%	1.14%	1.12%	1.10%	1.08%
					Diametre =	HA16	HA16	HA16	HA16	HA16
					Espacement =	173	175	179	182	185
					Ah(cm2/m) =	15.49	15.23	14.97	14.71	14.45
					% =	0.77%	0.76%	0.75%	0.74%	0.72%
					Diametre =	HA14	HA14	HA14	HA14	HA14
					Espacement =	198	202	205	209	213
				3	x (m) =	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20
				0.200	y (m) =	1.80	1.35	0.90	0.45	0.00
				1.800	smax (MPa) =	11.136	9.353	7.571	5.788	5.283
				180.00	% =	96.6%	94.6%	76.6%	58.6%	53.4%
					smin (MPa) =	-4.71	-2.93	-1.15	0.64	1.14
					Avc(cm2/m) =	4.43	0.00	0.00	0.00	0.00
Decalage vers le Haut de 5.280 m					Avt(cm2/m) =	21.68	13.48	5.28	0.00	0.00
					% =	1.08%	0.67%	0.26%	0.00%	0.00%
					Diametre =	HA16	HA12	HA8		
					Espacement =	185	167	190		
					Ah (cm2/m) =	14.45	8.98	3.52	0.00	0.00
					% =	0.72%	0.45%	0.18%	0.00%	0.00%
					Diametre =	HA14	HA10	HA8		

			Espacement =	213	174	285		
4	x (m) =	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00
0.200	y (m) =	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0.00
0.400	smax (MPa) =	5.189	5.189	5.189	5.189	5.189
0.00	% =	48.1%	48.1%	48.1%	48.1%	48.1%
	smin (MPa) =	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28
	Avc(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Avt(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Ah(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	x (m) =	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00
0.200	y (m) =	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.400	smax (MPa) =	5.189	5.189	5.189	5.189	5.189
180.00	% =	48.1%	48.1%	48.1%	48.1%	48.1%
	smin (MPa) =	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28
	Avc(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Avt(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Ah(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	x (m) =	18.00	18.55	19.10	19.65	20.20
0.200	y (m) =	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
2.200	smax (MPa) =	5.189	4.574	4.204	4.543	5.283
-90.00	% =	54.8%	48.3%	44.4%	47.9%	55.8%
	smin (MPa) =	0.28	1.13	1.99	1.82	1.14
	Avc(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Avt(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Ah(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	x (m) =	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20
0.200	y (m) =	0.00	-0.45	-0.90	-1.35	-1.80
1.800	smax (MPa) =	5.283	5.788	7.571	9.353	11.136
180.00	% =	53.4%	58.6%	76.6%	94.6%	96.6%
	smin (MPa) =	1.14	0.64	-1.15	-2.93	-4.71
	Avc(cm2/m) =	0.00	0.00	0.00	0.00	4.43
Decalage vers le Haut de 5.280 m	Avt(cm2/m) =	0.00	0.00	5.28	13.48	21.68
	% =	0.00%	0.00%	0.26%	0.67%	1.08%
	Diametre =	HA8	HA12	HA16		
	Espacement =	190	167	185		
	Ah(cm2/m) =	0.00	0.00	3.52	8.98	14.45
	% =	0.00%	0.00%	0.18%	0.45%	0.72%
	Diametre =	HA8	HA10	HA14		
	Espacement =	285	174	213		
8	x (m) =	20.20	19.65	19.10	18.55	18.00
0.200	y (m) =	-1.80	-1.80	-1.80	-1.80	-1.80
2.200	smax (MPa) =	11.136	10.982	10.828	10.675	10.521
90.00	% =	96.4%	99.9%	99.0%	98.1%	97.2%
	smin (MPa) =	-4.71	-4.80	-4.88	-4.97	-5.05
	Avc(cm2/m) =	4.56	4.46	4.36	4.26	4.16
Decalage vers le Haut de 5.280 m	Avt(cm2/m) =	21.68	22.07	22.46	22.85	23.24
	% =	1.08%	1.10%	1.12%	1.14%	1.16%
	Diametre =	HA16	HA16	HA16	HA16	HA16
	Espacement =	185	182	179	175	173

				Ah(cm2/m)	=	14.45	14.71	14.97	15.23	15.49
				%	=	0.72%	0.74%	0.75%	0.76%	0.77%
				Diametre	=	HA14	HA14	HA14	HA14	HA14
				Espacement	=	213	209	205	202	198
			9	x (m)	=	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00
			0.200	y (m)	=	-1.80	-1.70	-1.60	-1.50	-1.40
			0.400	smax (MPa)	=	10.521	10.125	9.729	9.333	8.936
			0.00	%	=	97.6%	93.9%	90.2%	86.6%	82.9%
				smin (MPa)	=	-5.05	-4.66	-4.26	-3.86	-3.47
				Avc(cm2/m)	=	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Decalage vers le Haut de 5.280 m				Avt(cm2/m)	=	23.24	21.42	19.60	17.78	15.95
				%	=	1.16%	1.07%	0.98%	0.89%	0.80%
				Diametre	=	HA16	HA16	HA16	HA14	HA14
				Espacement	=	173	187	205	173	192
				Ah(cm2/m)	=	15.49	14.28	13.07	11.85	10.64
				%	=	0.77%	0.71%	0.65%	0.59%	0.53%
				Diametre	=	HA14	HA14	HA12	HA12	HA12
				Espacement	=	198	215	173	190	212
0	3	497	-12316	1	x (m)	=	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
		827	20526	0.500	y (m)	=	-11.70	-11.78	-11.85	-11.93	-12.00
		9877		0.300	smax (MPa)	=	12.007	12.082	12.157	12.232	12.307
		0.92		180.00	%	=	87.4%	88.0%	88.6%	89.2%	89.8%
					smin (MPa)	=	-4.32	-4.37	-4.43	-4.48	-4.54
					Avc(cm2/m)	=	13.41	13.54	13.68	13.81	13.95
Decalage vers le Haut de 5.040 m					Avt(cm2/m)	=	49.64	50.28	50.92	51.56	52.20
					%	=	0.99%	1.01%	1.02%	1.03%	1.04%
					Diametre	=	HA25	HA25	HA25	HA25	HA25
					Espacement	=	197	195	192	190	188
					Ah(cm2/m)	=	33.10	33.52	33.95	34.38	34.80
					%	=	0.66%	0.67%	0.68%	0.69%	0.70%
					Diametre	=	HA20	HA20	HA20	HA20	HA20
					Espacement	=	189	187	185	182	180
			2	x (m)	=	6.00	4.50	3.00	1.50	0.00
			0.200	y (m)	=	-12.00	-12.00	-12.00	-12.00	-12.00
			6.000	smax (MPa)	=	12.307	9.791	7.275	5.073	5.176
			90.00	%	=	98.2%	79.9%	93.9%	65.5%	66.8%
				smin (MPa)	=	-4.54	-2.67	-0.81	0.74	-0.01
				Avc(cm2/m)	=	6.54	4.70	0.00	0.00	0.00
Decalage vers le Haut de 5.040 m				Avt(cm2/m)	=	20.88	12.30	3.73	0.00	0.00
				%	=	1.04%	0.62%	0.19%	0.00%	0.00%
				Diametre	=	HA16	HA12	HA8		
				Espacement	=	192	183	269		
				Ah(cm2/m)	=	13.92	8.20	2.48	0.00	0.00
				%	=	0.70%	0.41%	0.12%	0.00%	0.00%
				Diametre	=	HA14	HA10	HA6		
				Espacement	=	221	191	227		
			3	x (m)	=	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
			0.200	y (m)	=	-12.00	-10.50	-9.00	-7.50	-6.00

			6.000	smax (MPa)	=	5.176	5.131	6.133	7.134	8.136
			0.00	%	=	66.8%	66.2%	79.2%	92.1%	95.2%
				smin (MPa)	=	-0.01	-0.36	-1.75	-3.14	-4.53
				Avc(cm2/m)	=	0.00	0.00	0.00	0.00	3.44
Decalage vers le Haut de 5.040 m				Avt(cm2/m)	=	0.00	1.65	8.05	14.44	20.84
				%	=	0.00%	0.08%	0.40%	0.72%	1.04%
				Diametre	=	HA6	HA10	HA14	HA16	
				Espacement	=	333	195	213	192	
				Ah(cm2/m)	=	0.00	1.10	5.36	9.63	13.89
				%	=	0.00%	0.05%	0.27%	0.48%	0.69%
				Diametre	=	HA6	HA8	HA12	HA14	
				Espacement	=	333	187	234	221	
			4	x (m)	=	0.00	0.08	0.15	0.23	0.30
			0.500	y (m)	=	-6.00	-6.00	-6.00	-6.00	-6.00
			0.300	smax (MPa)	=	8.136	8.052	7.968	7.884	7.800
			-90.00	%	=	70.4%	69.7%	69.0%	68.3%	67.5%
				smin (MPa)	=	-4.53	-4.41	-4.30	-4.18	-4.06
				Avc(cm2/m)	=	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Decalage vers le Haut de 5.040 m				Avt(cm2/m)	=	52.09	50.75	49.41	48.08	46.74
				%	=	1.04%	1.02%	0.99%	0.96%	0.93%
				Diametre	=	HA25	HA25	HA25	HA25	HA25
				Espacement	=	188	193	198	204	210
				Ah(cm2/m)	=	34.73	33.84	32.94	32.05	31.16
				%	=	0.69%	0.68%	0.66%	0.64%	0.62%
				Diametre	=	HA20	HA20	HA20	HA20	HA20
				Espacement	=	180	185	190	196	201

5.7.6.3. Enveloppes des contraintes et pourcentages d'acier maximal

Pour le Vent

Maximum de		Niveau No	Voile No	Rect No	Cas de Ch No	x m	y m
Pourc.Acier	: 1.16%	0	2	9	5	18.000	-1.800
Contr.Beton	: 12.31 MPa	0	3	1	7	6.000	-12.000
Cont.Relat.Bet.	: 99.99%	0	2	1	1	18.000	1.800
Cisail.(<1.25)	: 1.12 MPa	0	2	1	1	18.000	1.600

ATTENTION:
Les Aciers Verticaux tendus doivent etre prolonges
vers le haut de 0.80 fois la Longueur du Voile

5.7.6.4. Ferraillage (exemple pour le niveau le plus bas)

TABLEAU DE FERRAILLAGE

Le Ferraillage ci-apres tient Compte du Decalage de 0.80 L vers le Haut

Niv de la Cote No	a la Cote	Voile No	Rect No	sur Longueur	de	a	Avert L/esp.	Ahor L/esp.	Eping./m2 Lt (Ldr)
0 de 0.00 m		1	1	0.080	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	4HA 6
a 3.15 m					y= 11.70 m	y= 11.78 m	4.40/195	0.28/187	582(450)
0 de 0.00 m		1	1	0.070	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	25HA 8
a 3.15 m					y= 11.78 m	y= 11.85 m	4.40/192	0.27/185	626(450)
0 de 0.00 m		1	1	0.080	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	25HA 8
a 3.15 m					y= 11.85 m	y= 11.93 m	4.40/190	0.28/182	626(450)
0 de 0.00 m		1	1	0.070	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	26HA 8
a 3.15 m					y= 11.93 m	y= 12.00 m	4.40/188	0.27/180	626(450)
0 de 0.00 m		1	2	1.500	x= 6.00 m	x= 4.50 m	HA16	HA14	4HA 6
a 3.15 m					y= 12.00 m	y= 12.00 m	3.95/192	1.64/221	282(150)
0 de 0.00 m		1	2	1.500	x= 4.50 m	x= 3.00 m	HA12	HA10	4HA 6
a 3.15 m					y= 12.00 m	y= 12.00 m	3.75/183	1.60/191	282(150)
0 de 0.00 m		1	2	1.500	x= 3.00 m	x= 1.50 m	HA8	HA6	
a 3.15 m					y= 12.00 m	y= 12.00 m	3.55/269	1.56/228	
0 de 0.00 m		1	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA6	HA6	
a 3.15 m					y= 12.00 m	y= 10.50 m	3.45/333	1.56/333	
0 de 0.00 m		1	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA10	HA8	
a 3.15 m					y= 10.50 m	y= 9.00 m	3.65/195	1.58/187	
0 de 0.00 m		1	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA14	HA12	
a 3.15 m					y= 9.00 m	y= 7.50 m	3.85/213	1.62/234	
0 de 0.00 m		1	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA16	HA14	4HA 6
a 3.15 m					y= 7.50 m	y= 6.00 m	3.95/192	1.64/221	282(150)
0 de 0.00 m		1	4	0.080	x= 0.00 m	x= 0.08 m	HA25	HA20	
a 3.15 m					y= 6.00 m	y= 6.00 m	4.40/188	0.28/180	
0 de 0.00 m		1	4	0.070	x= 0.08 m	x= 0.15 m	HA25	HA20	
a 3.15 m					y= 6.00 m	y= 6.00 m	4.40/193	0.27/185	
0 de 0.00 m		1	4	0.080	x= 0.15 m	x= 0.23 m	HA25	HA20	
a 3.15 m					y= 6.00 m	y= 6.00 m	4.40/198	0.28/190	
0 de 0.00 m		1	4	0.070	x= 0.23 m	x= 0.30 m	HA25	HA20	
a 3.15 m					y= 6.00 m	y= 6.00 m	4.40/204	0.27/196	
0 de 0.00 m		2	1	0.100	x= 18.00 m	x= 18.00 m	HA14	HA12	
a 3.15 m					y= 1.40 m	y= 1.50 m	3.85/173	0.22/190	
0 de 0.00 m		2	1	0.100	x= 18.00 m	x= 18.00 m	HA16	HA12	
a 3.15 m					y= 1.50 m	y= 1.60 m	3.95/205	0.22/173	
0 de 0.00 m		2	1	0.100	x= 18.00 m	x= 18.00 m	HA16	HA14	
a 3.15 m					y= 1.60 m	y= 1.70 m	3.95/187	0.24/215	
0 de 0.00 m		2	1	0.100	x= 18.00 m	x=18.00 m	HA16	HA14	
a 3.15 m					y= 1.70 m	y= 1.80 m	3.95/173	0.24/198	
0 de 0.00 m		2	2	0.550	x= 18.00 m	x= 18.55 m	HA16	HA14	4HA 6
a 3.15 m					y= 1.80 m	y= 1.80 m	3.95/173	0.69/198	282(150)
0 de 0.00 m		2	2	0.550	x= 18.55 m	x= 19.10 m	HA16	HA14	4HA 6
a 3.15 m					y= 1.80 m	y= 1.80 m	3.95/175	0.69/202	282(150)
0 de 0.00 m		2	2	0.550	x= 19.10 m	x= 19.65 m	HA16	HA14	4HA 6
a 3.15 m					y= 1.80 m	y= 1.80 m	3.95/179	0.69/205	282(150)
0 de 0.00 m		2	2	0.550	x= 19.65 m	x= 20.20 m	HA16	HA14	4HA 6
a 3.15 m					y= 1.80 m	y= 1.80 m	3.95/182	0.69/209	282(150)
0 de 0.00 m		2	3	0.450	x= 20.20 m	x= 20.20 m	HA16	HA14	4HA 6
a 3.15 m					y= 1.80 m	y= 1.35 m	3.95/185	0.59/213	282(150)
0 de 0.00 m		2	3	0.450	x= 20.20 m	x= 20.20 m	HA12	HA10	
a 3.15 m					y= 1.35 m	y= 0.90 m	3.75/167	0.55/174	
0 de 0.00 m		2	3	0.450	x= 20.20 m	x= 20.20 m	HA8	HA8	

a 3.15 m					y= 0.90 m	y= 0.45 m	3.55/190	0.53/285	
0 de 0.00 m	2	7	0.450	x= 20.20 m	x= 20.20 m	HA8	HA8		
a 3.15 m					y= -0.45 m	y= -0.90 m	3.55/190	0.53/285	
0 de 0.00 m	2	7	0.450	x= 20.20 m	x= 20.20 m	HA12	HA10		
a 3.15 m					y= -0.90 m	y= -1.35 m	3.75/167	0.55/174	
0 de 0.00 m	2	7	0.450	x= 20.20 m	x= 20.20 m	HA16	HA14	4HA 6	
a 3.15 m					y= -1.35 m	y= -1.80 m	3.95/185	0.59/213	282(150)
0 de 0.00 m	2	8	0.550	x= 20.20 m	x= 19.65 m	HA16	HA14	4HA 6	
a 3.15 m					y= -1.80 m	y= -1.80 m	3.95/182	0.69/209	282(150)
0 de 0.00 m	2	8	0.550	x= 19.65 m	x= 19.10 m	HA16	HA14	4HA 6	
a 3.15 m					y= -1.80 m	y= -1.80 m	3.95/179	0.69/205	282(150)
0 de 0.00 m	2	8	0.550	x= 19.10 m	x= 18.55 m	HA16	HA14	4HA 6	
a 3.15 m					y= -1.80 m	y= -1.80 m	3.95/175	0.69/202	282(150)
0 de 0.00 m	2	8	0.550	x= 18.55 m	x= 18.00 m	HA16	HA14	4HA 6	
a 3.15 m					y= -1.80 m	y= -1.80 m	3.95/173	0.69/198	282(150)
0 de 0.00 m	2	9	0.100	x= 18.00 m	x= 18.00 m	HA16	HA14		
a 3.15 m					y= -1.80 m	y= -1.70 m	3.95/173	0.24/198	
0 de 0.00 m	2	9	0.100	x= 18.00 m	x= 18.00 m	HA16	HA14		
a 3.15 m					y= -1.70 m	y= -1.60 m	3.95/187	0.24/215	
0 de 0.00 m	2	9	0.100	x= 18.00 m	x= 18.00 m	HA16	HA12		
a 3.15 m					y= -1.60 m	y= -1.50 m	3.95/205	0.22/173	
0 de 0.00 m	2	9	0.100	x= 18.00 m	x= 18.00 m	HA14	HA12		
a 3.15 m					y= -1.50 m	y= -1.40 m	3.85/173	0.22/190	
0 de 0.00 m	3	1	0.080	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	4HA 6	
a 3.15 m					y=-11.70 m	y=-11.78 m	4.40/195	0.28/187	582(450)
0 de 0.00 m	3	1	0.070	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	25HA 8	
a 3.15 m					y=-11.78 m	y=-11.85 m	4.40/192	0.27/185	626(450)
0 de 0.00 m	3	1	0.080	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	25HA 8	
a 3.15 m					y=-11.85 m	y=-11.93 m	4.40/190	0.28/182	626(450)
0 de 0.00 m	3	1	0.070	x= 6.00 m	x= 6.00 m	HA25	HA20	26HA 8	
a 3.15 m					y=-11.93 m	y=-12.00 m	4.40/188	0.27/180	626(450)
0 de 0.00 m	3	2	1.500	x= 6.00 m	x= 4.50 m	HA16	HA14	4HA 6	
a 3.15 m					y=-12.00 m	y=-12.00 m	3.95/192	1.64/221	282(150)
0 de 0.00 m	3	2	1.500	x= 4.50 m	x= 3.00 m	HA12	HA10	4HA 6	
a 3.15 m					y=-12.00 m	y=-12.00 m	3.75/183	1.60/191	282(150)
0 de 0.00 m	3	2	1.500	x= 3.00 m	x= 1.50 m	HA8	HA6		
a 3.15 m					y=-12.00 m	y=-12.00 m	3.55/269	1.56/228	
0 de 0.00 m	3	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA6	HA6		
a 3.15 m					y=-12.00 m	y=-10.50 m	3.45/333	1.56/333	
0 de 0.00 m	3	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA10	HA8		
a 3.15 m					y=-10.50 m	y= -9.00 m	3.65/195	1.58/187	
0 de 0.00 m	3	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA14	HA12		
a 3.15 m					y= -9.00 m	y= -7.50 m	3.85/213	1.62/234	
0 de 0.00 m	3	3	1.500	x= 0.00 m	x= 0.00 m	HA16	HA14	4HA 6	
a 3.15 m					y= -7.50 m	y= -6.00 m	3.95/192	1.64/221	282(150)
0 de 0.00 m	3	4	0.080	x= 0.00 m	x= 0.08 m	HA25	HA20		
a 3.15 m					y= -6.00 m	y= -6.00 m	4.40/188	0.28/180	
0 de 0.00 m	3	4	0.070	x= 0.08 m	x= 0.15 m	HA25	HA20		
a 3.15 m					y= -6.00 m	y= -6.00 m	4.40/193	0.27/185	
0 de 0.00 m	3	4	0.080	x= 0.15 m	x= 0.23 m	HA25	HA20		
a 3.15 m					y= -6.00 m	y= -6.00 m	4.40/198	0.28/190	
0 de 0.00 m	3	4	0.070	x= 0.23 m	x= 0.30 m	HA25	HA20		
a 3.15 m					y= -6.00 m	y= -6.00 m	4.40/204	0.27/196	

5.7.6.5. Quantitatif

```
Quantites:
----------

  Beton          =    293.33  m3
  Coffrage       =   2797.20  m2
  Epaiss.Moy.    =      0.210 m
  Acier Vert.    =   6639.5   kg
  Acier Horiz.   =   5366.3   kg
  Epingles       =     31.4   kg
  Acier Total    =  12037.2   kg
  Densite        =     41.04  kg/m3


Pour le Niveau 0:
  Voile     Beton     Aciers    Densite
   No         m3        kg       kg/m3
    1        8.51      891.0     104.76
    2        7.43      819.5     110.24
    3        8.51      891.0     104.76
Total:      24.44     2601.5     106.43
```

Remarque

Le ferraillage ci-dessus est à aménager pour :

- les rectangles de faible longueur où les quatre quarts peuvent être regroupés en deux moitiés, voire en un seul élément de même ferraillage pour éviter des variations de ferraillage trop rapprochées et des armatures horizontales trop courtes ;
- les poteaux qui ont été armés en voile et dont il faut déterminer les armatures horizontales (cadres et épingles) en fonction des dispositions constructives « poteaux ».

6. VOILES AVEC FILES D'OUVERTURES

6.1. RELATION VENT RÉEL - VENT TRAPÉZOÏDAL

Un certain nombre de méthodes de calcul de contreventement sont démontrées pour des vents trapézoïdaux. Nous nous proposons de trouver une schématisation trapézoïdale de vent qui donne la même résultante et le même moment en pied (Fig. 50) :

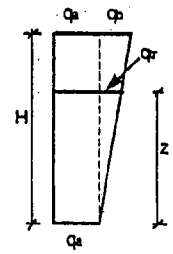


Fig. 50 – Vent trapézoïdal.

Pour une pression par unité de hauteur q_a en pied et $q_a + q_b$ en tête, la résultante (ou effort tranchant) et le moment en pied valent :

$$V = q_a H + q_b \frac{H}{2} \quad \text{et} \quad M = q_a \frac{H^2}{2} + q_b \frac{H^2}{3} \quad \text{(chapitre 2, cas 26 et 28).}$$

De ces deux équations, on peut tirer q_a et q_b en fonction de V et M :

$$q_a = \frac{2}{H^2}(2\,V\,H - 3\,M) \quad \text{et} \quad q_b = \frac{6}{H^2}(2\,M - V\,H).$$

Ainsi, si l'on connaît les valeurs des effort tranchant et moment en pied, on peut assimiler le vent réel à un vent trapézoïdal de pression q_a en pied et $q_a + q_b$ en tête.

En particulier, si la pression du vent est définie par trois valeurs en pied q_0, à mi-hauteur q_1 et en tête q_2, l'effort tranchant et le moment valent :

$$V = \frac{q_0 + 4q_1 + q_2}{6} H \quad \text{et} \quad M = \frac{2q_1 + q_2}{6} H^2$$

D'où les parts reprises par :

- le vent constant : $V_a = 4\,V - \frac{6M}{H}$

- le vent triangulaire : $V_b = \frac{6M}{H} - 3\,V.$

Remarques

1. On peut caractériser un vent trapézoïdal par sa valeur en pied $V = V_a + V_b$ somme des résultantes dues à la partie rectangulaire (V_a) et à la partie triangulaire (V_b).
A la cote x la valeur de l'effort tranchant dû au vent vaut :

$$V(x) = V_a\left(1 - \frac{x}{H}\right) + V_b\left(1 - \frac{x^2}{H^2}\right)$$

2. L'action du séisme, suivant les *Règles PS 69*, peut être traitée comme un vent triangulaire, car la force statique équivalente est peu différente d'une distribution triangulaire (nulle en pied, maximale en tête).

EXEMPLE

Nous prendrons les valeurs de q_v calculées dans l'exemple du chapitre 3, §. 4.9. Pour une hauteur H = 38,4 m (12 niveaux de h = 3,2 m), l'effort tranchant et le moment en pied valent 38,806 kN et 861,24 kNm pour un mètre de largeur de vent (voir tableau ci-dessous).

Les valeurs de la pression sont prise égales à la demi-somme des valeurs en haut et en bas, centrée à mi-hauteur d'étage. Ainsi, au niveau 12 :

$$hq_v = \frac{1{,}231 + 1{,}177}{2} \times 3{,}2 = 3{,}853 \text{ kN} \quad \text{et} \quad zhq_v = \frac{38{,}4 + 35{,}2}{2} \times 3{,}853 = 141{,}81 \text{ kNm}.$$

• **Vent réel**

i	z m	q_v kN/m	hq_v kN	V kN	zhq_v kNm	M kNm
12	38,4	1,231	3,853	3,85	141,81	141,81
11	35,2	1,177	3,699	7,55	124,29	266,10
10	32,0	1,135	3,571	11,12	108,54	374,64
9	28,8	1,097	3,443	14,57	93,68	468,32
8	25,6	1,055	3,315	17,88	79,56	547,88
7	22,4	1,017	3,211	21,09	66,77	614,66
6 •	19,2	0,990	3,118	24,21	54,90	669,56
5	16,0	0,959	3,014	27,23	43,41	712,97
4	12,8	0,925	2,904	30,13	32,51	745,47
3	9,6	0,890	2,781	32,91	22,26	767,74
2	6,4	0,848	2,642	35,55	12,68	780,42
1	3,2	0,803	2,486	38,04	3,96	784,38
0	0,0	0,751				

On calcule les valeurs de q_a et q_b du vent trapézoïdal équivalent :

$$q_a = \frac{2}{H^2}(2\,V\,H - 3\,M) = \frac{2}{38{,}4^2}(2 \times 38{,}04 \times 38{,}4 - 3 \times 784{,}38) = 0{,}7708 \text{ kN/m}$$

$$q_b = \frac{6}{H^2}(2\,M - V\,H) = \frac{6}{38{,}4^2}(2 \times 784{,}38 - 38{,}04 \times 38{,}4) = 0{,}4396 \text{ kN/m}$$

• **Vent trapézoïdal**

i	z_i/H	q_{tr} kN/m	hq_{tr} kN	V kN	zhq_{tr} kNm	M kNm	ΔM kNm	%
12	1,000	1,210	3,82	3,82	141,42	140,42	−1,39	−0,98 %
11	0,917	1,174	3,70	7,51	124,24	264,66	−1,44	−0,54 %
10	0,833	1,137	3,58	11,09	108,81	373,47	−1,17	−0,31 %
9	0,750	1,100	3,46	14,56	94,22	467,70	−0,62	−0,13 %
8	0,667	1,064	3,35	17,90	80,30	548,00	0,11	0,02 %
7	0,583	1,027	3,23	21,13	67,13	615,13	0,47	0,08 %
6	0,500	0,991	3,11	24,24	54,78	669,91	0,35	0,05 %
5	0,417	0,954	2,99	27,24	43,11	713,02	0,05	0,01 %
4	0,333	0,917	2,88	30,11	32,20	745,22	−0,26	−0,03 %
3	0,250	0,890	2,76	32,87	22,09	767,31	−0,43	−0,06 %
2	0,167	0,844	2,64	35,51	12,68	779,99	−0,42	−0,05 %
1	0,083	0,807	2,52	38,04	4,02	784,02	−0,36	−0,05 %
0	0,000	0,771						

On remarque que la différence est tout à fait négligeable, surtout pour les étages inférieurs les plus sollicités. On pourra très bien utiliser un vent trapézoïdal en remplacement du vent réel.

6.2. *VOILES À UNE FILE D'OUVERTURES DE MÊMES CARACTÉRISTIQUES*

Pour des bâtiments de grande hauteur, de plus de 10 niveaux, on peut remplacer les actions concentrées de chaque linteau sur les deux refends par des actions réparties que l'on pourra intégrer sur toute la hauteur du voile.

La méthode [1] suppose les hypothèses suivantes :
1 - les efforts dus au vent ont une répartition trapézoïdale sur la hauteur ;
2 - les efforts localisés des linteaux sur les refends sont supposés répartis ; cela suppose que les refends ont une largeur suffisante par rapport à la hauteur d'étage ;
3 - on néglige les déformations des linteaux sous effort normal ;

4 - les deux refends sont supposés encastrés dans leur base ;
5 - les caractéristiques géométriques et mécaniques des linteaux et refends sont identiques sur toute la hauteur.

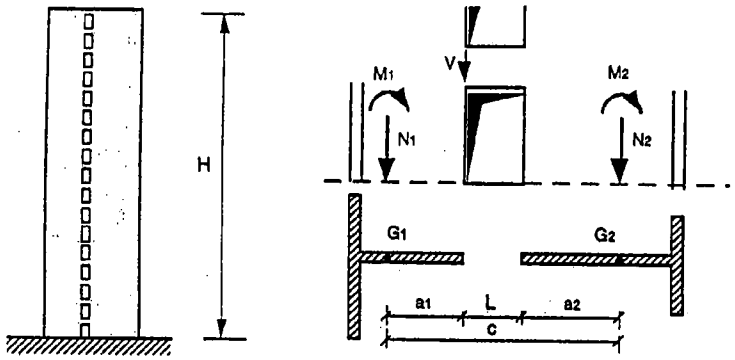


Fig. 51 – Voile à une file d'ouverture et deux refends.

6.2.1. Notations (Fig. 51)

H = hauteur totale du voile
h = hauteur d'étage
c = distance entre les centres de gravité des deux refends
L = largeur de l'ouverture
G_1 et G_2 : centres de gravité des deux refends
S_1 et S_2 = aires des deux refends
m = moment statique de la partie située d'un côté du centre de gravité du voile par rapport à ce centre : $m = \dfrac{c}{\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2}}$

I_1 et I_2 = moments d'inertie des deux refends
I_t = moment d'inertie du voile entier : $I_t = I_1 + I_2 + mc$
S et I = aire et inertie du linteau
N_1 et N_2 = efforts normaux verticaux dans les deux refends en leur centre de gravité
M_1 et M_2 = moments fléchissants dans les deux refends
V_1 et V_2 = efforts tranchants horizontaux dans les deux refends
V et N = effort tranchant vertical et effort normal horizontal dans chaque linteau
V_t = effort tranchant total dû au vent à la cote x

$y = f$ = déformée horizontale des refends
$y' = \omega$ = rotation des refends par rapport à la verticale
E et E' = modules d'Young des deux refends (le module E' peut être réduit à la moitié ou au tiers de sa valeur pour tenir compte de l'état de fissuration du linteau fléchi et fissuré qui est plus déformable).

6.2.2. Calcul de l'effort tranchant dans les linteaux

Nous avons vu au chapitre 10, §. 14.3.2 la relation suivante entre aires, moment statique et inerties :

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{c^2}{I_1 + I_2} = \frac{cI_t}{m(I_1 + I_2)}$$

Les éléments de réduction des sollicitations dans les deux refends sont :
N_1, M_1 et V_1 pour le refend 1
N_2, M_2 et V_2 pour le refend 2

En l'absence d'effort normal extérieur, on a la relation d'équilibre : $N_2 = -N_1$.

Sous l'action des efforts normaux verticaux N_1 et N_2 entraînant des contraintes de compression différentes et de l'action du vent, les refends se déforment verticalement et horizontalement. Comme on a supposé aucun raccourcissement ni allongement des linteaux (hypothèse 3), les linteaux ont même déformée horizontale $f = y$ et donc même rotation en extrémités $\omega = y'$ (Fig. 52).

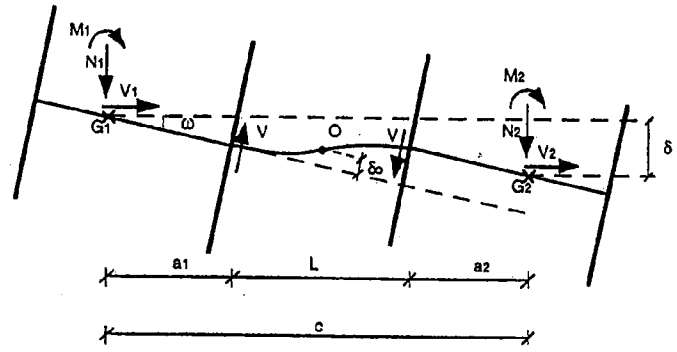


Fig. 52 – Déformée des linteaux.

Pour un linteau de longueur L, de moment d'inertie I et de module d'Young E', le point de moment nul est situé au milieu, puisque l'angle de rotation est le même à ses deux extrémités. La flèche δ_o est celle d'une console de portée L/2 soumise à une charge

concentrée V en son extrémité (voir chapitre 2, cas 24) :

$$\delta_a = \frac{V(L/2)^3}{3E'I} = \frac{VL^3}{24E'I}$$

La longueur δ est égale (Fig. 52) à :

$$\delta = \omega\,(a_1 + L + a_2) - 2\,\delta_a = c\,y' - \frac{VL^3}{12E'I} = c\,y' - V\,K \quad \text{en posant} \quad K = \frac{L^3}{12E'I}$$

Cette longueur δ représente la différence de déformée entre les deux refends sous l'action des efforts normaux N_1 et N_2 :

$$\delta = \int_a^x \frac{N_2 dx}{ES_2} - \int_a^x \frac{N_1 dx}{ES_1} = c\,y' - K\,V$$

On en tire :

$$c\,y' = K\,V + \frac{1}{E}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\int_a^x N_2 dx \qquad \text{puisque } N_1 = -N_2 \qquad (74)$$

En dérivant deux fois, on obtient :

$$c\,y'' = K\,V' + \frac{N_2}{E}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) \qquad (75)$$

$$c\,y''' = K\,V'' + \frac{1}{E}\frac{dN_2}{dx}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) \qquad (76)$$

Or, pour un élément de refend de hauteur *dx*, compris entre deux plans horizontaux (Fig. 53), l'équilibre des sollicitations agissant sur cet élément se traduit par les équations suivantes :

	Refend 1	Refend 2
Moments	$dM_1 = -V_1\,dx + \frac{Vdx}{h}\left(a_1 + \frac{L}{2}\right)$ (77)	$dM_2 = -V_2\,dx + \frac{Vdx}{h}\left(a_2 + \frac{L}{2}\right)$ (78)
Efforts verticaux	$dN_1 = \frac{Vdx}{h}$ (79)	$dN_2 = -\frac{Vdx}{h}$ (80)
Efforts horizontaux	$dV_1 = \frac{Ndx}{h}$ (81)	$dV_2 = -\frac{Ndx}{h}$ (82)

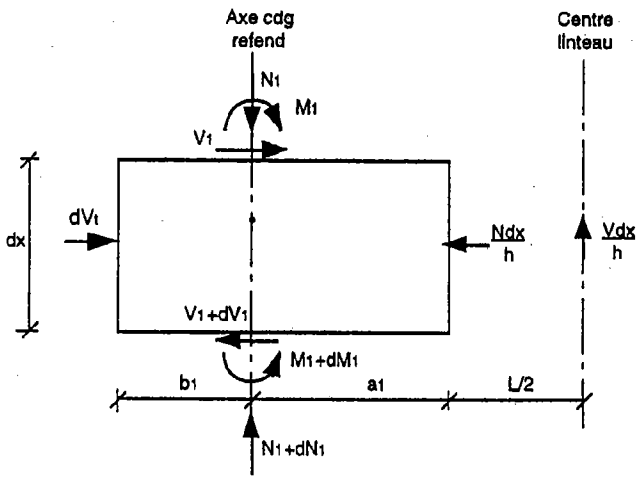


Fig. 53 – Élément du refend 1 de hauteur dx.

La variation d'effort normal par unité de hauteur de refend est due à l'effort tranchant du linteau à répartir sur la hauteur de l'étage : $\frac{dN_2}{dx} = -\frac{V}{h}$

d'où :

$$c\,y''' = K\,V'' - \frac{1}{E}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\frac{V}{h} \qquad (83)$$

La relation moment-courbure des refends (chapitre 1, §. 2, éq. 9) s'écrit : $M = E\,I\,y''$ et en dérivant pour chaque refend :

$$\frac{dM_1}{dx} = E\,I_1\,y''' \quad \text{et} \quad \frac{dM_2}{dx} = E\,I_2\,y'''$$

Les équations (77) et (78) s'écrivent alors :

$$\frac{dM_1}{dx} = E\,I_1\,y''' = -V_1 + \frac{V(a_1 + L/2)}{h} \qquad (84)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = E\,I_2\,y''' = -V_2 + \frac{V(a_2 + L/2)}{h} \qquad (85)$$

Soit V_t l'effort tranchant de l'ensemble (effort cumulé de vent depuis le sommet jusqu'à la cote x du niveau étudié), on a : $V_1 + V_2 = V_t$.
En additionnant les deux équations (84) et (85), on obtient :

$$E\,y'''(I_1 + I_2) = \frac{Vc}{h} - V_t \qquad (86)$$

En éliminant y''' entre cette dernière équation et l'équation (83), on trouve :

$$\frac{K\,V''}{c} - \frac{V}{Ehc}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) = \frac{cV - hV_t}{Eh\,(I_1 + I_2)}$$

et en ordonnant en V, on trouve une équation différentielle du deuxième ordre :

$$V'' - \frac{1}{EhK}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{c^2}{I_1 + I_2}\right)V = -\frac{cV_t}{EK(I_1 + I_2)} \qquad (87)$$

Pour un vent trapézoïdal $V_t = V_a\left(1 - \frac{x}{H}\right) + V_b\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)$ où V_a représente la valeur cumulée de vent en pied de voile correspondant à la partie rectangulaire du vent trapézoïdal et V_b la valeur correspondant à la partie triangulaire. Pour $x = 0$, l'effort tranchant total vaut $V_{in} = V_a + V_b$.

Posons :

$$G = \frac{-c}{EK(I_1 + I_2)}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{EhK}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{c^2}{I_1 + I_2}\right) \qquad \text{coefficient * de V dans l'équation (87)}$$

et comme $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{c^2}{I_1 + I_2} = \frac{cI_t}{m(I_1 + I_2)}$; $\omega^2 = \frac{cI_t}{EhKm(I_1 + I_2)}$

L'équation différentielle (87) devient :

$$V'' - \omega^2\,V = G\,V_a\left(1 - \frac{x}{H}\right) + G\,V_b\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right). \qquad (88)$$

dont la solution générale est :

$$V = A_1\,ch(\omega x) + A_2\,sh(\omega x) + P(x) \qquad (89)$$

$P(x)$ étant un polynôme à déterminer.

Dérivons l'équation (89) deux fois :

$$V'' = A_1\,\omega^2\,ch(\omega x) + A_2\,\omega^2\,sh(\omega x) + P''(x)$$

que nous reportons dans (88) :

$$V'' - \omega^2\,V = P''(x) - \omega^2\,P(x) = G\,V_a\left(1 - \frac{x}{H}\right) + G\,V_b\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)$$

Le polynôme $P(x)$ est du deuxième degré, soit de la forme $P(x) = \beta\,x^2 + \gamma\,x + \delta$
d'où, en dérivant deux fois, on obtient : $P''(x) - P(x) = 2\,\beta - \omega^2\,\beta\,x^2 - \omega^2\,\gamma\,x - \omega^2\,\delta$ que nous égalisons terme à terme avec le deuxième membre de (88)

* Cet ω n'est pas l'angle ω utilisé à la figure 52.

$$x^2 : -\beta\,\omega^2 x^2 = -G\,V_b\,\frac{x^2}{H^2} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{GV_b}{\omega^2 H^2} \qquad (90)$$

$$x : -\gamma\,\omega^2\,x = -G\,V_a\,\frac{x}{H} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{GV_a}{\omega^2 H} \qquad (91)$$

constante : $2\,\beta - \omega^2\,\delta = G\,V_a + G\,V_b \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{2GV_b}{\omega^4 H^2} - \frac{G(V_a + V_b)}{\omega^2}$ (92)

La solution de l'équation différentielle (89) s'écrit :

$$V = A_1\,ch(\omega x) + A_2\,sh(\omega x) + \beta\,x^2 + \gamma x + \delta \qquad (93)$$

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées par les conditions aux limites.

• En pied : $x = 0$; $y' = 0$ (pas de rotation) ; $\int_0^0 N dx = 0 \rightarrow V = 0$ d'après (74),

soit $V = A_1 + \delta = 0$ et $A_1 = -\delta$. (94)

• En tête : $x = H$ et $y'' = 0$ (moment et effort normal nuls), donc $V' = 0$ d'après (75). La dérivée de V est égale à : $V' = A_1\,\omega\,sh(\omega x) + A_2\,\omega\,ch(\omega x) + 2\,\beta\,x + \gamma$
soit pour $x = H$: $V' = A_1\,\omega\,sh(\omega H) + A_2\,\omega\,ch(\omega H) + 2\,\beta\,H + \gamma = 0$
d'où :

$$A_2 = \delta\,\frac{sh(\omega H)}{ch(\omega H)} - \frac{2\beta H + \gamma}{\omega ch(\omega H)} = \delta\,\frac{sh(\omega H)}{ch(\omega H)} - \frac{G(V_a + 2V_b)}{\omega^3 H ch(\omega H)} \qquad (95)$$

6.2.3. Calcul des moments M_1 et M_2 dans les refends

Pour obtenir le moment, calculons l'intégrale $\mu(x)$ de l'effort tranchant depuis le sommet du voile (où le moment est nul) jusqu'à la cote x :

$$\mu(x) = \int_H^x V dx = \int_H^x (A_1\,ch(\omega x) + A_2\,sh(\omega x) + \beta x^2 + \gamma x + \delta) dx$$

$$\mu(x) = \left[\frac{A_1}{\omega}\,sh(\omega x) + \frac{A_2}{\omega}\,ch(\omega x) + \frac{\beta x^3}{3} + \gamma\,\frac{x^2}{2} + \delta x\right]_H^x \qquad (96)$$

$$\mu(x) = \frac{A_1}{\omega}[sh(\omega x) - sh(\omega H)] + \frac{A_2}{\omega}[ch(\omega x) - ch(\omega H)] + \frac{\beta}{3}(x^3 - H^3)$$

$$+ \frac{\gamma}{2}(x^2 - H^2) + \delta(x - H)$$

L'intégration de l'équation (86) entre les bornes H et x (puisque le moment en tête est nul) donne : $E\,y''(I_1+I_2) = \frac{c}{h}\int_H^x V\,dx - \int_H^x V_t\,dx$.

La relation moment-courbure s'écrit :

$$M_1 = E\,I_1\,y'' = \frac{I_1}{I_1+I_2}\left[\frac{c}{h}\int_H^x V\,dx - \int_H^x V_t\,dx\right]$$ d'après l'équation précédente.

Or V_t est l'effort tranchant total dû au vent trapézoïdal. Il s'écrit, comme on l'a vu :

$V_t = V_a\left(1-\frac{x}{H}\right) + V_b\left(1-\frac{x^2}{H^2}\right)$ dont l'intégrale vaut entre les cotes H (où le moment dû au vent est nul) et x :

$$\mu_1(x) = \int_H^x V_t\,dx = (V_a+V_b)(x-H) - V_a\frac{x^2-H^2}{2H} - V_b\frac{x^3-H^3}{3H^2} \qquad (97)$$

et $$M_1 = \frac{I_1}{I_1+I_2}\left[\frac{c}{h}\mu(x) - \mu_1(x)\right] \qquad (98)$$

de même : $$M_2 = \frac{I_2}{I_1+I_2}\left[\frac{c}{h}\mu(x) - \mu_1(x)\right] \quad \text{ou} \quad M_2 = M_1\frac{I_2}{I_1} \qquad (99)$$

6.2.4. Calcul des efforts normaux N_1 et N_2 dans les refends

Par intégration de l'équations (80) entre les bornes H et x (puisque N est nul pour $x = H$), on trouve :

$$N_2 = -\int_H^x \frac{V}{h}\,dx = -\frac{1}{h}\int_H^x V\,dx = -\frac{1}{h}\mu(x)$$

$$N_1 = -N_2$$

6.2.5. Efforts tranchants V_1 et V_2 dans les refends

Dérivons l'équation donnant M_1 :

$$\frac{dM_1}{dx} = \frac{I_1}{I_1+I_2}\left[\frac{c}{h}\frac{d\mu(x)}{dx} - \frac{d\mu_1(x)}{dx}\right] = \frac{I_1}{I_1+I_2}\left[\frac{c}{h}V - V_t\right]$$

valeur que l'on reporte dans l'équation (77)

$$\frac{I_1}{I_1+I_2}\left[\frac{cV}{h} - V_t\right] = -V_1 + \frac{V}{h}\left(a_1 + \frac{L}{2}\right)$$

d'où l'on tire $$V_1 = V\left[-\frac{c}{h}\frac{I_1}{I_1+I_2} + \frac{a_1+L/2}{h}\right] + \frac{V_t I_1}{I_1+I_2} \qquad (100)$$

et $$V_2 = V\left[-\frac{c}{h}\frac{I_2}{I_1+I_2} + \frac{a_2+L/2}{h}\right] + \frac{V_t I_2}{I_1+I_2} = V_t - V_1 \qquad (101)$$

6.2.6. Efforts normaux N dans les linteaux

De l'équation (81) $\frac{dV_1}{dx} = \frac{N}{h}$ on tire :

$$N = h\frac{dV_1}{dx} = h\frac{dV}{dx}\left[-\frac{c}{h}\frac{I_1}{I_1+I_2} + \frac{a_1+L/2}{h}\right] + \frac{dV_t}{dx}\frac{I_1}{I_1+I_2}$$

$$N = h[\omega A_1\,sh(\omega x) + \omega A_2\,ch(\omega x) + 2\beta x + \gamma]\left[-\frac{c}{h}\frac{I_1}{I_1+I_2} + \frac{a_1+L/2}{h}\right] - \left[\frac{V_a}{H} + \frac{2V_b}{H}\left(1-\frac{x}{H}\right)\right]\frac{I_1}{I_1+I_2} \qquad (102)$$

6.2.7. Flèche

La flèche se calcule par intégrations successives de l'équation (86) :

$$E\,y'''(I_1+I_2) = \frac{Vc}{h} - V_t \qquad (86)$$

en remplaçant la valeur de V trouvée dans l'équation (88) :

$$V'' - \omega^2 V = G\,V_t \qquad (88)$$

d'où l'on tire $V = \frac{V'' - GV_t}{\omega^2}$ et

$$E\,y''(I_1+I_2) = \frac{c}{\omega^2 h}(V'' - G\,V_t) - V_t = \frac{cV''}{\omega^2 h} - V_t\left(1 + \frac{cG}{\omega^2 h}\right)$$

qui est une équation différentielle du troisième ordre. Si l'on remplace G et ω^2 par leurs

valeurs vues plus haut, on trouve : $\left(1+\frac{cG}{\omega^2 h}\right)=\frac{I+I_2}{I_t}$

Nous calculerons successivement :

- le moment dû au vent par intégration entre les bornes H et x (puisque le moment dû au vent est nul en tête)

$$\mu_1(x)=\int_H^x V_t\,dx=(V_a+V_b)(x-H)-V_a\frac{x^2-H^2}{2H}-V_b\frac{x^3-H^3}{3H^2} \qquad (97)$$

$$\mu_1(x)=V_a\left(x-\frac{x^2}{2H}-\frac{H}{2}\right)+V_b\left(x-\frac{x^3}{3H^2}-\frac{2H}{3}\right) \qquad (103)$$

- la rotation due au vent entre les bornes 0 et x (puisque la rotation est nulle en pied) :

$$\mu_2(x)=\int_H^x \mu_1 dx=V_a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6H}-\frac{Hx}{2}\right)+V_b\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12H^2}-\frac{2Hx}{3}\right) \qquad (104)$$

- la flèche due au vent entre les bornes 0 et x (puisque la flèche est nulle en pied) :

$$\mu_3(x)=\int_H^x \mu_2 dx=V_a\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24H}-\frac{Hx^2}{4}\right)+V_b\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{60H^2}-\frac{Hx}{6}\right) \qquad (105)$$

Intégrons deux fois l'équation différentielle (86) :

$$E\,y'(I_1+I_2)=\frac{cV}{\omega^2 h}-\mu_2(x)\frac{I_1+I_2}{I_t}$$

Puis une troisième fois entre les bornes $x=0$ (flèche nulle) et x :

$$E\,y\,(I_1+I_2)=\frac{cV}{\omega^2 h}\int_0^x V dx-\mu_3(x)\frac{I_1+I_2}{I_t}=\frac{c}{\omega^2 h}\,[\mu(x)-\mu(0)]-\mu_3(x)\frac{I_1+I_2}{I_t}$$

Enfin : $y=\frac{c[\mu(x)-\mu(0)]}{E(I_1+I_2)\,\omega^2 h}-\frac{\mu_3(x)}{EI_t}$ (106)

6.2.8 - Nature des ouvertures et inertie équivalente

En fonction de la valeur du coefficient * $\alpha=\omega H$, on distingue [1] :

- les ouvertures de petite dimension pour $\alpha > 10$ pour lesquelles on peut considérer que les deux refends se comportent de façon indépendante et que l'inertie équivalente est égale à la somme des inerties : $I_{éq}=I_1+I_2$.

* Ce coefficient α n'est pas un angle.

- les ouvertures de grande dimension pour $\alpha < 1$ pour lesquelles on peut considérer que les deux refends se comportent de façon monolithe et que l'inertie équivalente est égale à :

$$I_{éq}=I_t=I_1+I_2+\frac{c^2}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}}$$

- les ouvertures de moyenne dimension pour $1 < \alpha < 10$ pour lesquelles le comportement est intermédiaire entre les deux cas précédents et où il faut déterminer l'inertie équivalente comme indiqué en 4 ci-dessus.

Pour un vent trapézoïdal à la cote x, $V_t=V_a\left(1-\frac{x}{H}\right)+V_b\left(1-\frac{x}{H}\right)^2$ où V_a et V_b représentent respectivement les efforts tranchants à la base dus aux parties rectangulaire et trapézoïdale, la flèche d'une console encastrée à la base, aux cotes x = 0,8 H, 0,9 H et H valent (voir chapitre 2, cas 22 et 28) :

Partie du vent :	$x=$	0,8 H	0,9 H	H
rectangulaire	$f=\frac{H^3 V_a}{EI_{éq}}\times$	0,0917	0,1083	0,1250
triangulaire	$f=\frac{H^3 V_b}{EI_{éq}}\times$	0,1335	0,1583	0,1833

6.2.9. Exemple

Soit le voile de 10 étages de 2,86 m (Fig. 54), composé de deux refends dont les caractéristiques géométriques S_1, S_2, I_1 et I_2 sont calculées comme indiqué en 2.4 ci-dessus.

Le linteau a 0,76 m de hauteur et 0,20 m d'épaisseur. Son moment d'inertie vaut :

$$I=\frac{0{,}2\times 0{,}76^3}{12}=0{,}00732\ m^4$$

Le vent est supposé trapézoïdal avec une pression de calcul de 25,94 kN/m en pied et 36,89 kN/m en tête.

Les efforts de vent en pied valent :

- pour la partie rectangulaire : $V_a = 28{,}6\times 25{,}94 = 742$ kN ;

pour la partie triangulaire : $V_b = (36{,}89 - 25{,}94)\times 28{,}6 / 2 = = 156{,}5$ kN.

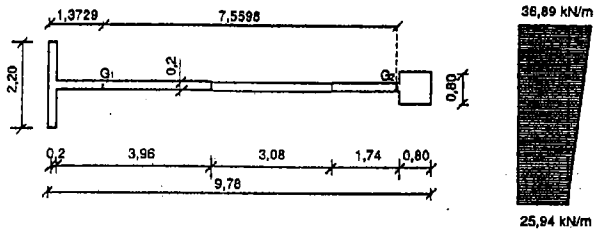


Fig. 54 – Exemple de voile à une file d'ouverture sous vent trapézoïdal.

Variable	Unité		Valeur
H =	m	donnée	28,6
h =	m	donnée	2,86
c =	m	donnée	7,5598
L =	m	donnée	3,08
a_1 =	m	donnée	2,7871
E =	MPa	donnée	30000
E' =	MPa	donnée	30000
S_1 =	m^2	donnée	1,2320
S_2 =	m^2	donnée	0,9880
m =	m^3	$\frac{c}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}}$	4,1450
I =	m^4	donnée	0,00732
I_1 =	m^4	donnée	1,2890
I_2 =	m^4	donnée	0,3989
I_t =	m^4	$I_1 + I_2 + mc$	33,0233
V_a =	MN	donnée	0,7420
V_b =	MN	donnée	0,1565
K =		$\frac{L3}{12E'I}$	0,01109
ω^2 =	m^{-2}	$\frac{cI_t}{(I_1+I_2)\,EhKm}$	0,0375
ω =	m^{-1}	$\sqrt{\omega^2}$	0,1936
α =		ωh	5,5375
G* =		$-\frac{c}{EK(I_1+I_2)}$	– 0,0135
β =		(15)	– 0,0001
γ =		(16)	– 0,0093
δ =		(17)	0,3189
A_1 =		– δ	– 0,3189
A_2 =		(20)	0,3194
ch (ωH) =			127,023
sh (ωH) =			127,019

• Sollicitations

Niveau	x	V_t	shωx	chωx	μ(x)	$\mu_1(x)$	V	M_t	M_2	N_1	V_1	V_2	N	$\mu_3(x)$	f
							Linteau	Refend 1	Refend 2	Refend 1	Refend 1	Refend 1	Linteau		Refends
	m	MN					MN	MNm	MNm	MN	MN	MN	MN		mm
					(21)	(22)	(20)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(31)	(32)
10	28,60	0,000	127,02	127,02	0,000	0,000	0,0622	0,0000	0,0000	0,0000	–0,0315	0,0315	0,0259	–1886	6,75
9	25,74	0,076	73,007	73,014	–0,186	–0,108	0,0701	–0,2928	–0,0906	–0,0650	0,0224	0,0533	0,0196	–1635	6,24
8	22,88	,0155	41,960	41,972	–0,140	–0,436	0,0882	–0,4952	–0,1533	–0,1435	0,0735	0,0812	0,0169	–1397	5,68
7	20,02	0,237	24,111	24,132	–0,695	–0,995	0,1110	–0,6424	–0,1988	–0,2429	0,1246	0,1121	0,0164	–1165	5,05
6	17,16	0,322	13,847	13,883	–1,046	–1,793	0,1347	–0,7426	–0,2298	–0,3658	0,1777	0,1441	0,0177	–935,8	4,33
5	14,30	0,410	7,938	8,001	–1,463	–2,839	0,1558	–0,7843	–0,2427	–0,5114	0,2344	0,1757	0,0206	–712,4	3,53
4	11,44	0,502	4,526	4,635	–1,932	–4,142	0,1709	–0,7366	–0,2279	–0,6755	0,2966	0,2050	0,0256	–500,3	2,66
3	8,58	0,596	2,538	2,728	–2,430	–5,711	0,1747	–0,5433	–0,1681	–0,8495	0,3669	0,2292	0,0340	–309,0	1,77
2	5,72	0,694	1,348	1,679	–2,913	–7,555	0,1587	–0,1100	–0,0340	–1,0184	0,4496	0,2442	0,0478	–151,1	0,94
1	2,86	0,795	0,582	1,157	–3,305	–9,682	0,1087	0,7217	0,2233	–1,1557	0,5518	0,2427	0,0709	–42,1	0,28
0	0,00	0,899	0,000	1,000	–3,479	–12,103	0,0000	2,2198	0,6870	–1,2164	0,6862	0,2123	0,1103	0,0	0,00

• **Flèche équivalente**

Pour un voile d'ouvertures de taille moyenne (α compris entre 1 et 10), on peut calculer l'inertie équivalente en égalisant les flèches à la cote 0,9 H. On a trouvé $f(0,9) = 6,24$ mm

D'où l'inertie équivalente par (voir en 6.2.8 ci-dessus) :

$$f(0,9) = \frac{H^3}{EI_{éq}} (0,1083\ V_a + 0,1583\ V_b) = 0,00624$$

avec :
$V_a = 0,742$ MN
$V_b = 0,1565$ MN
E = 30 000 MPa
H = 28,6 m
On obtient $I_{éq} = 13,138\ m^4$ au lieu de $33,023\ m^4$ si les linteaux étaient très rigides.

*6.3. VOILES À N FILES D'OUVERTURES. PROGRAMME « LINTEAUX » **

Le calcul des voiles à *n* files d'ouvertures ($n > 1$) est développé dans l'article de V. Guillot [3]. La méthode est trop longue pour être décrite ici. Une application en est faite dans le programme « LINTEAUX » ci-dessous.

Le programme « LINTEAUX » est une application de la méthode Despeyroux-Guillot, parue dans les *Annales ITBTP* de février 1972 pour le calcul de voiles de contreventement comportant plusieurs files d'ouvertures .

Il permet de calculer :

- le degré de monolithisme des voiles - coefficients α ;
- la flèche au sommet dues aux charges verticales et au vent ;
- la flèche aux 8/10 de la hauteur ;
- l'inertie équivalente à prendre en compte pour le calcul du contreventent d'un bâtiment (programme « CONTREV » ;
- les sollicitations et contraintes ;
- les aciers nécessaires.

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées.

6.3.1. Mode d'emploi

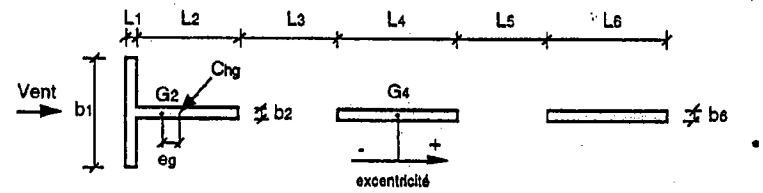


Fig. 55 – Voile à n files d'ouvertures.

Ligne 1 **Titre**

Ligne 2 b, L, (C_{hg}, C_{hq}, e_g, e_q)
b = largeur du rectangle composant du voile (m) prise dans le sens perpendiculaire au voile (mettre la valeur zéro pour une ouverture)
L = longueur du rectangle (m) parallèlement au vent (ou longueur de l'ouverture)
C_{hg} = charge permanente (kN) appliquée sur ce rectangle et par étage
C_{hq} = charge d'exploitation ou neige (kN) appliquée sur ce rectangle et par étage
e_g = excentricité (m) de la charge permanente par rapport au centre de gravité du rectangle (pour le signe, voir figure ci-dessus)
e_q = excentricité (m) de la charge d'exploitation par rapport au centre de gravité du rectangle
Prévoir une ligne par rectangle et par ouverture.
Les charges et excentricités ne sont pas à écrire pour les linteaux.
Ecrire 0 pour passer à la ligne 3

Ligne 3 e_L, h_L
e_L = épaisseur du linteau (m)
h_L = hauteur du linteau (m)
Prévoir une ligne par linteau, puis passer à la ligne 4.

Ligne 4 $N_{ét}$, $h_{ét}$, p_{vo}, p_{v1}, p_{v2}, f_{cr}, f_{cL}, f_e, Côté
$N_{ét}$ = nombre d'étages ($\leqslant 100$)
$h_{ét}$ = hauteur d'étages (m)
p_{vo} = pression du vent (kN/m) en pied du voile
p_{v1} = pression du vent (kN) à mi-hauteur (si $p_{v1} = 0$, le programme supposera le vent trapézoïdal). Le vent est supposé être parabolique.
p_{v2} = pression du vent (kN) en tête
f_{cr} = résistance caractéristique du béton des rectangles (MPa)
f_{cL} = résistance caractéristique du béton des linteaux (MPa)
f_e = limite élastique de l'acier (MPa)
Côté = 1 pour un plancher d'un seul côté du voile,
= 2 pour un plancher de chaque côté du voile.

Conditions d'emploi :

- les éléments de voile sont supposés encastrés dans leurs fondations ;
- les caractéristiques géométriques des linteaux et des éléments de voile sont constantes sur toute la hauteur du bâtiment ; elles varient d'une file de linteaux à l'autre et d'un élément à l'autre ;
- le poids propre des éléments de voile est pris en compte automatiquement dans les calculs.

6.3.2. Exemple . Données

Voile composé de 3 refends et 2 linteaux par niveau (Fig. 56), le vent est supposé parabolique avec 1,82 kN/m en bas, 2,56 kN/m en haut et 2,27 kN/m à mi-hauteur.
Le voile est situé à l'intérieur du bâtiment et possède un plancher des deux côtés.

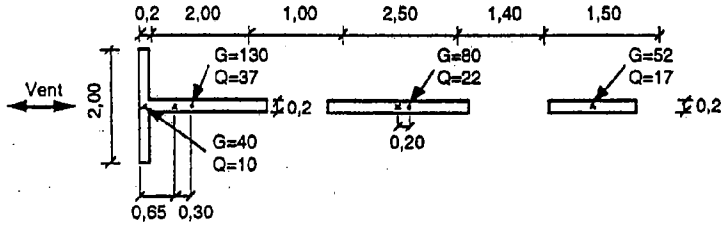


Fig. 56 – Voile avec deux files d'ouvertures.

6.3.3. Données en DATA

6470 DATA	Voile axe D	Titre
6480 DATA	2,0.2,40,10,0,0	2 m x 0,2 m, G = 40, Q = 10 kN centrés
6490 DATA	0.2,2,130,37,0.3,0.3	0,2 m x 2 m, G = 130, Q = 37 kN, exc. = 0,30 m
6500 DATA	0,1	linteau de 1 m de longueur
6510 DATA	0.2,2.5,80,22,0.2,0.2	0,2 m x 2,5 m, G = 80, Q = 22 kN, exc. = 0,20 m
6520 DATA	0,1.4	linteau de 1,4 m de longueur
6530 DATA	0.2,1.5,52,17,0,0	0,2 m x 1,5 m, G = 140, Q = 17 kN centrés
6540 DATA	0,0	fin de description des refends
6550 DATA	0.2,0.5	linteau 1 : 0,2 m x 0,5 m
6560 DATA	0.2,0.4	linteau 2 : 0,2 m x 0,4 m
6570 DATA	20,2.75,1.82,3.15,3.85, 25,25,500,2	20 étages de 2,75 m

6.3.4. Résultats

```
Le 20/11/1994
Repetition des Donnees
----------------------

Voile  1        b       L       G       Q       eg      eq
--------        m       m       kN      kN      m       m
  Rect.  1    2.000   0.200   40.00   10.00   0.000   0.000
  Rect.  2    0.200   2.000  130.00   37.00   0.300   0.300

           v =  0.650  m    v' =   1.550 m   L =   2.200 m
        Aire =  0.8000 m2    G = 170.00 kN   Q =  47.00 kN
     Inertie =  0.3767 m4   eg =   0.521 m  eq =   0.552 m

Voile  2        b       L       G       Q       eg      eq
--------        m       m       kN      kN      m       m
  Rect.  1    0.200   2.500   80.00   22.00   0.200   0.200

           v =  1.250  m    v' =   1.250 m   L =   2.500 m
        Aire =  0.5000 m2    G =  80.00 kN   Q =  22.00 kN
     Inertie =  0.2604 m4   eg =   0.200 m  eq =   0.200 m

Voile  3        b       L       G       Q       eg      eq
--------        m       m       kN      kN      m       m
  Rect.  1    0.200   1.500   52.00   17.00   0.000   0.000

           v =  0.750  m    v' =   0.750 m   L =   1.500 m
        Aire =  0.3000 m2    G =  52.00 kN   Q =  17.00 kN
     Inertie =  0.0563 m4   eg =   0.000 m  eq =   0.000 m

Linteaux    b       h       L       S       I
--------    m       m       m       m2      m4
  1       0.200   0.500   1.000   0.1000  0.00208
  2       0.200   0.400   1.400   0.0800  0.00107

     Poids Propre Voile  1 = 53.955 kN/etage
     Poids Propre Voile  2 = 33.722 kN/etage
     Poids Propre Voile  3 = 20.233 kN/etage

Pression du Vent en Tete du Voile =  3.85 kN/m
Pression du Vent a  Mi-hauteur    =  3.15 kN/m
Pression du vent en Pied du Voile =  1.82 kN/m

Efforts Cumules en Pied dus au vent :
  111.65 kN pour le Vent Rectangulaire seul
   55.82 kN pour le Vent Triangulaire seul
  167.47 kN pour le Vent Total

Inertie Totale (si Linteaux infiniment rigides) = 13.1631 m4
Somme des Inerties Individuelles                =  0.6933 m4
```

Nombre d'Etages = 20
Hauteur d'Etage = 2.750 m
Modules d'Young = 32164 MPa pour les Refends et 32164 MPa pour les Linteaux
Plancher des Deux Cotes du Voile
Alpha = 26.941 7.015

Coeff.des Combi.de Cas de Charges

Cas	Perm.	Exploit.	Vent
1	1.35	1.00	1.80
2	1.35	1.00	-1.80
3	1.35	1.50	1.20
4	1.35	1.50	-1.20
5	1.00	0.00	1.80
6	1.00	0.00	-1.80
7	1.00	0.00	0.00
8	0.00	1.00	0.00
9	0.00	0.00	1.00

No Et.	No Ref.	Efforts Moment kNm	Lintx Tranc. kN	Contr. Cisail. MPa	Section Long. cm2	Acier Trans. cm/m	Efforts dans Refends Moment kNm MPa	Normal kN MPa	Contr. Trancht KN MPa	Gauc. MPa	Compres. Droite MPa
20	1						0.0	0.0	-4.6	0.00	0.00
									0.00	0.00	0.00
20	2	19.7	39.4	0.44	1.02	2.24	0.0	0.0	88.9	0.00	0.00
									0.14	0.00	0.00
20	3	15.4	22.0	0.31	1.00	1.56	0.0	0.0	29.7	0.00	0.00
									0.03	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 0.0000 kN											
19	1						13.9	334.8	0.9	0.43	0.46
									0.00	0.00	-0.03
19	2	21.3	42.6	0.47	1.10	2.42	9.6	222.9	77.2	0.44	0.48
									0.13	0.00	-0.04
19	3	16.3	23.3	0.32	1.06	1.65	2.1	141.7	32.9	0.49	0.46
									0.04	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 19.8458 kN											
18	1						17.1	674.4	5.6	0.84	0.90
									0.01	0.00	-0.04
18	2	24.6	49.2	0.55	1.28	2.80	11.8	442.5	74.3	0.86	0.93
									0.13	0.00	-0.05
18	3	18.3	26.2	0.36	1.19	1.86	2.6	284.9	35.6	0.96	0.94
									0.05	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 39.1892 kN											
17	1						16.1	1019.8	9.9	1.25	1.33
									0.02	-0.01	-0.05
17	2	29.1	58.1	0.65	1.52	3.30	11.1	658.5	73.0	1.28	1.36
									0.13	0.00	-0.04
17	3	20.9	29.8	0.41	1.36	2.12	2.4	430.3	37.1	1.44	1.43
									0.05	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 58.0301 kN											
16	1						12.5	1371.0	13.9	1.69	1.76
									0.03	-0.03	-0.06

16	2	33.4	66.8	0.74	1.75	3.79	8.7	871.1	72.1	1.71	1.78
									0.13	0.00	-0.03
16	3	23.7	33.8	0.47	1.55	2.40	1.9	578.3	37.6	1.93	1.93
									0.06	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 76.3686 kN											
15	1						8.0	1727.9	17.7	2.15	2.19
									0.04	-0.06	-0.07
15	2	37.5	75.0	0.83	1.97	4.26	5.5	1081.0	71.4	2.14	2.19
									0.14	-0.00	-0.01
15	3	26.6	38.1	0.53	1.75	2.70	1.2	729.0	37.4	2.42	2.44
									0.07	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 94.2047 kN											
14	1						14.0	2090.2	21.3	2.61	2.63
									0.05	-0.10	-0.08
14	2	41.5	83.0	0.92	2.18	4.71	9.7	1299.5	70.8	2.56	2.64
									0.14	-0.00	0.00
14	3	29.6	42.4	0.59	1.96	3.01	2.1	882.5	36.5	2.92	2.97
									0.08	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 111.5383 kN											
13	1						25.1	2457.6	24.8	3.07	3.07
									0.07	-0.14	-0.09
13	2	45.3	90.6	1.01	2.39	5.14	17.3	1525.9	70.3	2.99	3.12
									0.14	-0.00	0.00
13	3	32.6	46.6	0.65	2.16	3.31	3.7	1038.9	35.2	3.42	3.51
									0.08	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 128.3696 kN											
12	1						37.6	2830.0	28.1	3.55	3.51
									0.08	-0.20	-0.10
12	2	49.0	97.9	1.09	2.59	5.56	26.0	1754.4	69.9	3.42	3.61
									0.14	-0.00	0.00
12	3	35.6	50.8	0.71	2.36	3.61	5.6	1198.2	33.6	3.93	4.05
									0.09	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 144.6984 kN											
11	1						51.6	3207.2	31.4	4.03	3.95
									0.09	-0.25	-0.12
11	2	52.6	105.1	1.17	2.79	5.97	35.7	1985.1	69.5	3.84	4.10
									0.14	-0.00	0.00
11	3	38.4	54.8	0.76	2.56	3.89	7.7	1360.1	31.7	4.45	4.63
									0.10	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 160.5247 kN											
10	1						67.0	3589.1	34.6	4.53	4.39
									0.11	-0.32	-0.14
10	2	56.1	112.2	1.25	2.98	6.37	46.3	2217.9	69.2	4.27	4.61
									0.14	-0.00	0.00
10	3	41.0	58.5	0.81	2.74	4.15	10.0	1530.8	29.7	4.98	5.24
									0.11	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 175.8487 kN											
9	1						83.9	3975.7	37.7	5.02	4.84
									0.12	-0.39	-0.16
9	2	59.6	119.2	1.32	3.18	6.77	58.0	2453.1	68.8	4.70	5.12
									0.14	0.00	0.00
9	3	43.3	61.9	0.86	2.91	4.39	12.5	1705.6	27.5	5.52	5.85
									0.11	0.00	0.00
Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 190.6703 kN											

```
8  1                                                  102.2 4366.8   40.9   5.53   5.29
                                                                      0.13  -0.46  -0.18
8  2   63.1   126.2   1.40   3.37   7.17   70.7 2690.9              68.5   5.13   5.63
                                                                      0.14   0.00   0.00
8  3   45.4    64.8   0.90   3.05   4.60   15.3 1883.5              25.2   6.07   6.48
                                                                      0.12   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 204.9894 kN
7  1                                                  122.2 4762.6   44.2   6.05   5.74
                                                                      0.14  -0.55  -0.20
7  2   66.7   133.4   1.48   3.58   7.57   84.5 2931.7              68.1   5.56   6.16
                                                                      0.14   0.00   0.00
7  3   47.0    67.1   0.93   3.16   4.76   18.2 2064.1              22.9   6.64   7.12
                                                                      0.12   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 218.8060 kN
6  1                                                  143.9 5163.0   47.6   6.60   6.19
                                                                      0.16  -0.64  -0.22
6  2   70.4   140.8   1.56   3.79   8.00   99.5 3176.2              67.7   6.00   6.70
                                                                      0.14   0.00   0.00
6  3   48.0    68.5   0.95   3.24   4.86   21.5 2246.5              20.5   7.20   7.77
                                                                      0.12   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 232.1203 kN
5  1                                                  167.7 5568.3   51.3   7.16   6.64
                                                                      0.17  -0.73  -0.25
5  2   74.3   148.6   1.65   4.01   8.44  116.0 3425.3              67.3   6.45   7.25
                                                                      0.14   0.00   0.00
5  3   48.1    68.8   0.96   3.25   4.88   25.0 2429.7              18.2   7.77   8.43
                                                                      0.13   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 244.9322 kN
4  1                                                  194.8 5979.3   55.4   7.74   7.09
                                                                      0.19  -0.84  -0.27
4  2   78.4   156.8   1.74   4.24   8.90  134.7 3680.2              66.8   6.89   7.83
                                                                      0.15   0.00   0.00
4  3   47.2    67.4   0.94   3.18   4.78   29.1 2612.5              16.0   8.32   9.10
                                                                      0.12   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 257.2415 kN
3  1                                                  228.1 6416.4   60.2   8.34   7.54
                                                                      0.21  -0.95  -0.29
3  2   82.1   164.2   1.82   4.45   9.32  157.7 3942.3              66.1   7.34   8.44
                                                                      0.15   0.00   0.00
3  3   44.5    63.5   0.88   2.99   4.51   34.1 2792.7              13.9   8.85   9.76
                                                                      0.12   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 269.0486 kN
2  1                                                  278.6 6860.0   66.2   8.96   7.96
                                                                      0.24  -1.09  -0.27
2  2   82.8   165.6   1.84   4.50   9.40  192.6 4211.6              67.3   7.76   9.17
                                                                      0.15   0.00   0.00
2  3   38.8    55.5   0.77   2.59   3.94   41.6 2967.2              12.0   9.34  10.45
                                                                      0.11   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 280.3531 kN
1  1                                                  386.1 7301.7   75.0   9.65   8.30
                                                                      0.28  -1.26  -0.15
1  2   69.7   139.4   1.55   3.75   7.92  267.0 4481.5              70.3   8.06  10.09
                                                                      0.18  -0.01   0.00
1  3   27.2    38.9   0.54   1.79   2.76   57.7 3129.9              10.4   9.66  11.20
```



```
                                                                      0.10   0.00   0.00
  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 291.1552 kN
0  1                                                  701.8 7703.4   91.0  10.52   9.29
                                                                      0.35  -1.56   0.00
0  2    0.0     0.0   0.00   0.00   0.00  485.2 4716.7               0.0   8.79  11.62
                                                                      0.25  -0.44   0.00
0  3    0.0     0.0   0.00   0.00   0.00  104.8 3266.9               0.0   9.59  12.29
                                                                      0.10   0.00   0.00

  Effort Horizontal Cumule Pondere Maxi = 301.4550 kN

Inertie Equivalente =  11.564 m4  soit 87.85% de l'Inertie Totale
Fleche au Sommet en mm :    fg =  1.24 mm (charges permanentes)
Fleche au Sommet en mm :    fq =  0.97 mm (charges variables)
Fleche au Sommet en mm :    fv = 10.79 mm (vent)

Refend    Contraintes Extremes en MPa                          Aciers en cm2/m/Face
No  Maxi     Mini    Non Arme   Arme   Cisail.   Vert.Tendu  Vert.Compr.   Horiz.
1  10.52    -1.56     8.541     2.57    0.35        3.60         1.00         2.40
2  11.62    -0.44     8.191     2.01    0.25        1.00         1.00         1.00
3  12.29     0.00     8.191     2.43    0.13                     2.36         1.57
Cisaillem. Maximum  =  0.35 OK  < 1.00
Les Aciers Tendus doivent etre prolonges de z vers le Haut

Contraintes dans Linteaux en MPa
Cisaillem. Maximum  =  1.84 OK  < 3.33
M/(bd2)    Maximum  =  2.04 OK  < 3.00

Temps de Calcul = 149 secondes
```

On remarquera que la première ouverture est petite ($\alpha > 10$) et la seconde est moyenne ($1 < \alpha < 10$).

7. CHANGEMENTS D'INERTIE

La plupart des méthodes de calcul de contreventement supposent que les voiles sont d'inerties constantes sur toute leur hauteur, ou du moins que les inerties varient toutes aux mêmes niveaux et dans les mêmes proportions.

Examinons sur un cas simple une variation d'inertie.

Soit un bâtiment de 10 niveaux de 3 m de hauteur, contreventé par trois voiles équidistants et de mêmes inerties. Le voile central s'arrête à la cote 12 m. On applique un effort en tête égal à 2 $F_{10} = 2$ kN. On cherche à savoir comment se répartit cet effort lors de l'apparition du 3e voile. (Fig. 57)

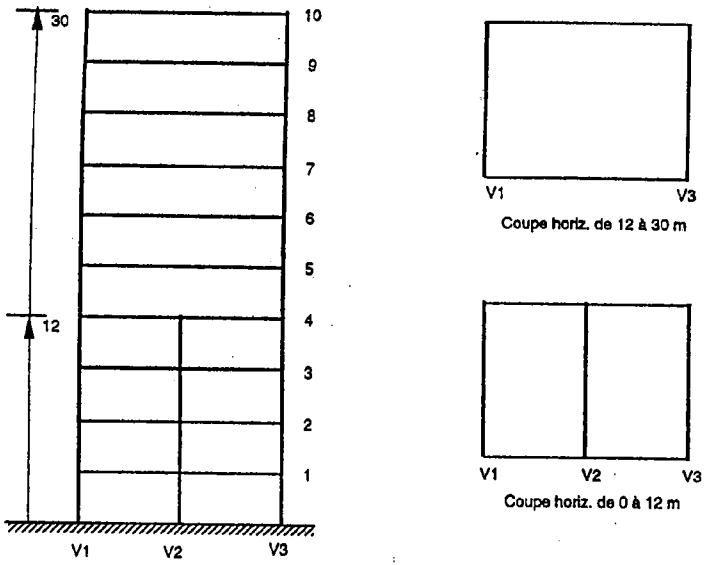
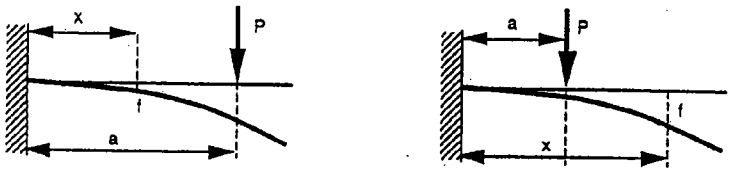


Fig. 57 – Bâtiment de 10 niveaux de 3 m.

7.1. RAPPEL DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Flèches d'une console sous charge concentrée. D'après chapitre 2, formule 25 (Fig. 58).



$$f = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2}\right) \qquad f = -\frac{Pa^2}{6EI}(2x - a)$$

Fig. 58 – Flèche sous charge concentrée.

Ce qui se traduit par les valeurs suivantes (Fig. 59) pour une charge unité P = 1 et un produit EI = 1 :

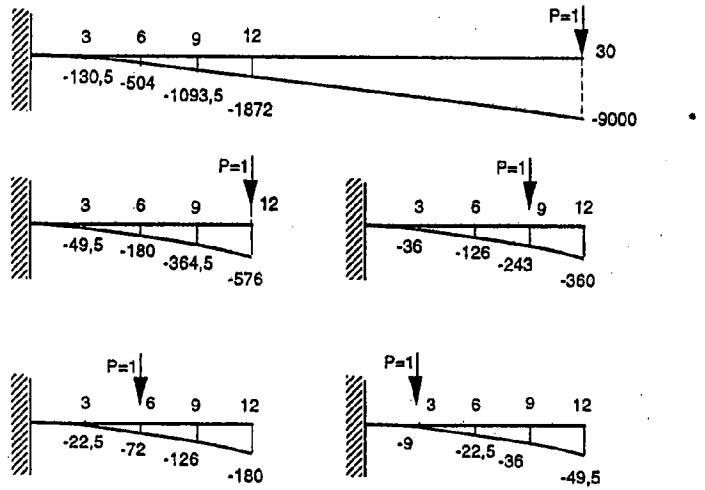


Fig. 59 – Flèches sous charge concentrée unité.

7.2. CAS PARTICULIER SANS PLANCHERS ENTRE LES COTES 3, 6 ET 9 M

Il n'y a qu'un seul plancher de répartition à la cote 12 m. Nous ferons l'hypothèse que la flèche horizontale dans le plancher est petite devant les flèches des voiles.

Les planchers situés au-dessus de 12 m ne changent pas la répartition de l'effort $2\,F_{10}$ dans les deux voiles (système isostatique symétrique, donc chaque voile reprend $F_{10} = 1$). Soit F_4 la force exercée par le plancher du niveau 4 sur le voile V_i (et V_3 par symétrie). La flèche du voile V_1, à cette cote, vaut : $-1872\,F_{10} + 576\,F_4$.

Elle est égale à celle du voile V_2 qui reçoit une charge horizontale $2\,F_4$ à la cote 12 m :

$$-2\,F_4 \times 876$$

D'où l'équation d'égalité des flèches :

$$-1872\,F_{10} + 576\,F_4 = -2\,F_4 \times 576 \quad \text{et} \quad F_4 = \frac{1872}{3 \times 576}\,F_{10} = 1{,}083\,F_{10}$$

Ainsi le voile V_2 reprend un effort double (voile V_1 et V_3) égal à $2{,}167\,F_{10}$, valeur supérieure à l'effort total appliqué en tête à la cote 30 m.

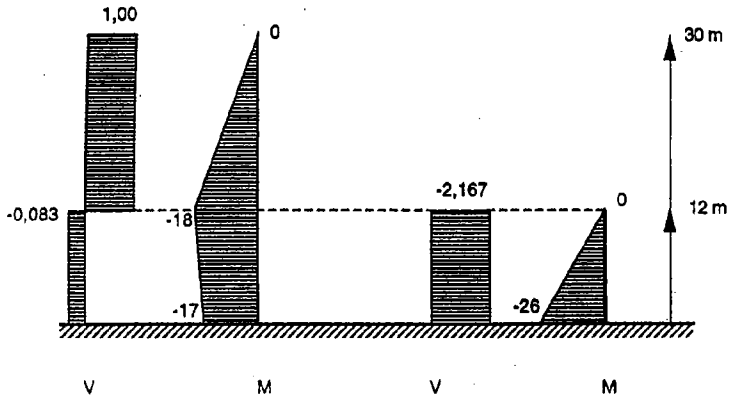


Fig. 60 – Courbes des efforts tranchants et moments dans les voiles.

On constate (Fig. 60) que les voiles V_1 et V_3 transmettent un peu plus que l'effort 2 F_{i0} au voile central V_2 et non un tiers pour chacun.

7.3. CAS AVEC 10 PLANCHERS AVEC UN VOILE 2 ARRÊTÉ AU NIVEAU 4

Soient F_1, F_2, F_3 et F_4 les efforts exercés par chacun des planchers des niveaux 1, 2, 3 et 4 sur le voile V_1. Le même raisonnement conduit à un système de 4 équations à 4 inconnues obtenu en écrivant l'égalité des flèches des voiles V_1 et V_2 à chaque niveau.

Flèche	due à une charge F_1 à 3 m	due à une charge F_2 à 6 m	due à une charge F_3 à 9 m	due à une charge F_4 à 12 m	due à une charge F_{10} à 30 m
à 12 m	3 × 49,5 = 148,5	540	1 093,5	1728	1872
à 9 m	108	378	729	1 093,5	1 093,5
à 6 m	67,5	216	378	540	504
à 3 m	27	67,5	108	148,5	130,5

Les racines de ce système d'équations sont :

$F_4 = 2{,}869$ (à 12 m)
$F_3 = -3{,}216$ (à 9 m)
$F_2 = 0{,}866$ (à 6 m)
$F_1 = -0{,}247$ (à 3 m)

On constate que (Fig. 61) :

- seuls les deux planchers de transition aux cotes 12 m et 9 m jouent un rôle majeur pour la répartition entre les voiles ;
- les efforts tranchants dans les planchers dépassent le triple de l'effort d'origine $F_{10} = 1$;
- les moments dans les voiles diffèrent notablement de ceux qui proviendraient d'une répartition au prorata des inerties. Par exemple, pour le voile V_1, le moment à 12 m vaut –18 dans tous les cas, mais un effort tranchant de 0,667 sur 12 m donne un moment complémentaire de –8 soit –26 au lieu de –20,1 par la méthode exacte ;
- le voile V_2 reprend un moment beaucoup plus important de –19,9 au lieu de –8 ;
- les moments en pied sont sensiblement les mêmes (20,1 et 19,9), que le voile V_2 soit ou non arrêté à 12 m.

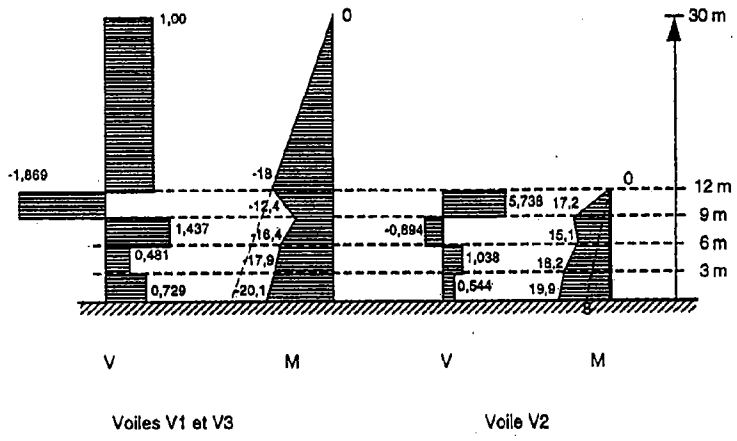


Fig. 61 – Courbes des efforts tranchants et moments dans les voiles avec 10 planchers.

7.4. Voile 2 à inertie non nulle au-dessus du niveau 4

On obtient un système de 10 équations à 10 inconnues. On peut dresser un tableau indiquant les valeurs des efforts supportés par les planchers suivant l'inertie relative du voile 2 au-dessus de la cote 12 m.

Effort dans le plancher au niveau :	I = 1	I = 0,9	I = 0,5	I = 0,1	I = 0
10	0,333	0,310	0,200	0,047	0
9	0	0,001	0,002	0,002	0
8	0	−0,002	−0,009	−0,007	0
7	0	0,008	0,035	0,025	0
6	0	−0,029	−0,129	−0,092	0
5	0	−0,107	0,482	0,344	0
4	0	0,029	0,387	1,916	2,869
3	0	−0,115	−0,804	−2,412	−3,216
2	0	0,031	0,216	0,649	0,866
1	0	−0,009	−0,062	−0,186	−0,247
Total	0,333	0,331	0,318	0,287	0,272

En conclusion :

- on évitera les changements d'inertie importants tels que l'apparition d'un nouveau voile ;
- on se rappellera que les voiles dont l'inertie augmente fortement « appellent » des efforts plus importants que ceux déduits de la simple répartition au prorata des inerties ;
- les trois planchers de transition (le plancher où a lieu le changement d'inertie et les deux planchers adjacents) subissent des efforts importants, d'autant plus que la variation d'inertie est forte ;
- tous les planchers situés en dessous du changement d'inertie sont affectés par le changement d'inertie.

8. COMMENT LIMITER LES DÉFORMATIONS EN TÊTE DE BÂTIMENTS DUES AU VENT ET AU SÉISME

Les déformations dans les étages supérieurs peuvent être gênantes pour les occupants sous l'action du vent et paniquantes sous l'action de séisme. Ainsi, les *Règles PS 92* limitent à H/250 la valeur maximale de la déformation horizontale.

Pour en limiter les effets, on peut, par exemple, augmenter la rigidité des voiles, disposer des retours pour en augmenter l'inertie, rapprocher le centre de torsion de la résultante du vent ou du séisme, préférer un contreventement par la façade plutôt que par des voiles internes, etc.

Un moyen efficace consiste à utiliser une poutre raidisseuse, de préférence au sommet du bâtiment, qui s'appuiera sur les poteaux de façade et provoquera dans le voile un moment de signe contraire à celui du vent (Fig. 62).

Cette solution peut se présenter lorsqu'on a un étage technique au dernier niveau (climatisation, réserve d'eau pour l'incendie, machinerie d'ascenseur, pompes et surpresseurs pour l'alimentation en eau, ...).

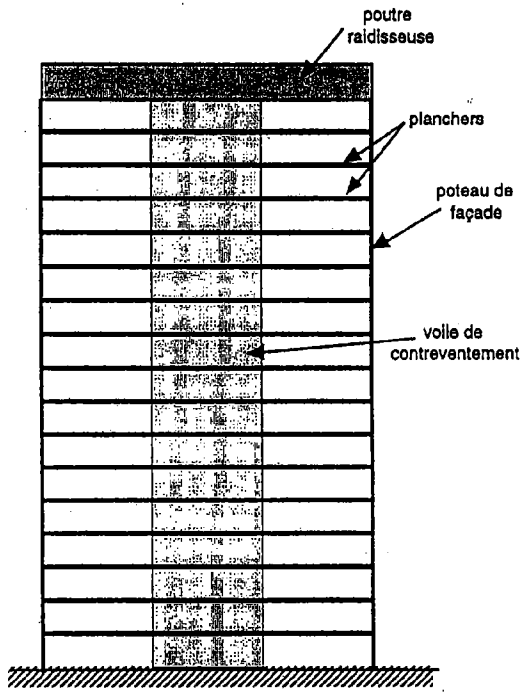


Fig. 62 – Contreventement par voiles et poutre raidisseuse.

8.1. DÉTERMINATION DE L'EFFORT DANS LE POTEAU

On suppose, a priori, que les deux poteaux de façade en extrémités de la poutre raidisseuse sont comprimés sur toute leur hauteur.

• **Action du vent seul sur le voile** (Fig. 63)

Soient :

q = charge de vent rectangulaire en kN/m
p = charge de vent triangulaire en kN/m
H = hauteur totale du bâtiment

L_o = demi-longueur du voile
E_v et I_v = module d'Young et moment d'inertie du voile (que l'on suppose constants sur toute la hauteur H)
L = longueur libre de la poutre raidisseuse
E_p et I_p = module d'Young et moment d'inertie de la poutre
E_c et S_c = module d'Young et aire de la section droite du poteau (que l'on suppose constants sur toute la hauteur H)

Rotation en tête de voile : $\omega_q = \dfrac{qH^3}{6E_vI_v} + \dfrac{pH^3}{8E_vI_v}$ (chapitre 2, cas 26 et 28)

Flèche horizontale en tête de voile : $f_{q1} = \dfrac{qH^4}{8E_vI_v} + \dfrac{11pH^4}{120\,E_vI_v}$ (chapitre 2, cas 26 et 28)

Flèche verticale en extrémité de poutre : $f_{q2} = \omega_q\,(L + L_o) = \left(\dfrac{q}{6} + \dfrac{p}{8}\right)\dfrac{H^3(L + L_o)}{E_vI_v}$

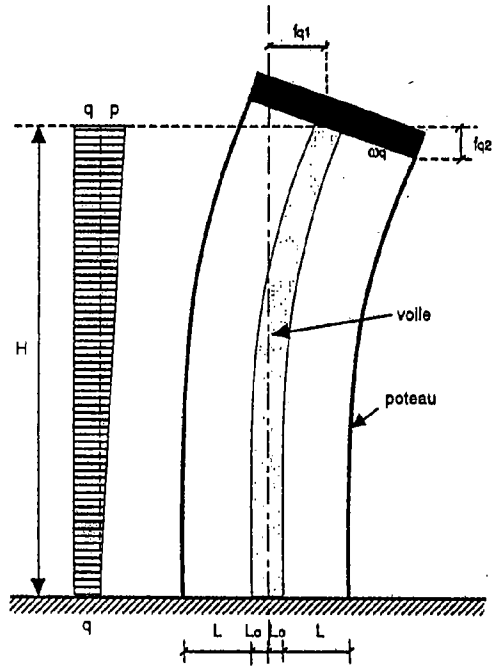


Fig. 63 – Déformées dues au vent q.

• **Action de la force F exercée par le poteau sur la poutre et le voile** (Fig. 64)
Nous supposerons, pour raison de symétrie, que les deux forces F_1 et F_2 sont égales à F.

Moment en tête de voile : $M = 2\,F\,(L + L_o)$

Rotation en tête de voile : $\omega_M = \dfrac{MH}{E_vI_v} = \dfrac{2F(L + L_o)H}{E_vI_v}$ (chapitre 2, cas 32)

Flèche verticale en extrémité de poutre : $f_F = \omega_M(L + L_o) + \dfrac{FL^3}{3E_pI_p}$ (chapitre 2, cas 24)

Flèche horizontale en tête de voile : $f_{q3} = \dfrac{MH^2}{2E_vI_v}$ (chapitre 2, cas 32)

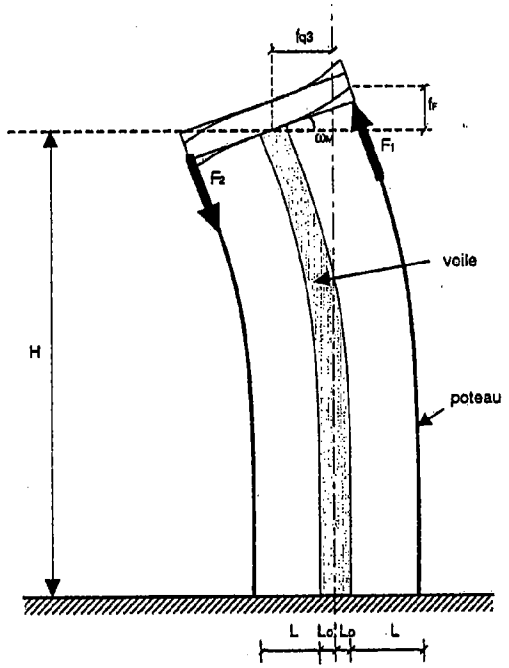


Fig. 64 – Déformées sous l'action des forces F_1 et F_2.

• Action de la force F exercée sur le poteau par la poutre

Déformation verticale du poteau : $f_{P1} = \dfrac{FH}{S_c E_c}$ (chapitre 1, éq. 1)

Déformation en extrémité de voile sous l'action de F et du vent q :

$$f_{P2} = f_{q2} - f_F$$

D'où en égalant f_{P1} et f_{P2} :

$$\frac{FH}{E_c S_c} = \left(\frac{q}{6} + \frac{p}{8}\right)\frac{H^3(L+L_o)^2}{E_v I_v} - \frac{2F(L+L_o)H}{E_v I_v} - \frac{FL^3}{3E_p I_p}$$

d'où l'on tire F :

$$F = \frac{\left(\frac{q}{6} + \frac{p}{8}\right) H^3 (L+L_o)}{E_v I_v \left(\frac{H}{E_c S_c} + \frac{2(L+L_o)^2 H}{E_v I_v} + \frac{L^3}{3E_p I_p}\right)}$$

8.2. APPLICATION NUMÉRIQUE

Données :

Vent trapézoïdal de 13,6 kN/m en tête et 8 kN/m en pied, soit $q = 8$ et $p = 5{,}6$
H = 75 m (25 niveaux de 3 m)
L_o = 4 m (voile de 8 m de longueur)
$E_v = E_p = E_c = 30\,000$ MPa
$I_v = 10{,}667$ m^4 (inertie du voile)
L = 8 m (longueur de la poutre)
h_p = 3,4 m (hauteur de la poutre)
e_p = 0,2 m (épaisseur de la poutre)
$I_p = 0{,}6551$ m^4 (inertie de la poutre)
$S_c = 0{,}81$ m^2 (aire du poteau)

d'où :

$$F = \frac{\left(\frac{8}{6} + \frac{5{,}6}{8}\right) 75^3 (8+4)}{10{,}667\left(\frac{75}{0{,}81} + \frac{2(8+4)^2 \times 75}{10{,}667} + \frac{8^3}{0{,}6551}\right)} = 405{,}8 \text{ kN}$$

Flèche sans poutre raidisseuse :

$$f_{q1} = \frac{qH^4}{8E_v I_v} + \frac{11pH^4}{120E_v I_v} = \frac{8 \times 75^4}{8 \times 30000 \times 10{,}667} + \frac{11 \times 5{,}6 \times 75^4}{120 \times 30000 \times 10{,}667} = 149{,}63 \text{ mm}$$

Moment en tête de voile :

$$M = 2F(L + L_o) = 2 \times 405{,}8\ (8+4) = 9\,739{,}2 \text{ kNm}$$

Flèche avec poutre raidisseuse :

$$f_{q1} - f_{q3} = f_{q1} - \frac{MH^2}{2E_v I_v} = 149{,}63 - \frac{9739{,}2 \times 75^2}{2 \times 30000 \times 10{,}667} = 149{,}63 - 85{,}60 = 64{,}03 \text{ mm}$$

Soit une réduction de 57 % de la flèche horizontale en tête de voile, 1/1171 au lieu de 1/501.

De même, on constate une diminution des contraintes en pied de voile :
– sans poutre raidisseuse

$$\sigma_1 = \frac{M_v L}{2I_v} \quad \text{avec}$$

$$M_v = \frac{qH^2}{2} + \frac{pH^2}{3} = \frac{8 \times 75^2}{2} + \frac{5{,}6 \times 75^2}{3} = 33\,000 \text{ kNm} = 33 \text{ MNm}$$

$$\sigma_1 = \frac{33 \times 8}{2 \times 10{,}667} = 12{,}38 \text{ MPa}$$

– avec poutre raidisseuse, $M_{v2} = M_v - M = 33 - 9{,}7392 = 23{,}261$ MNm

$\sigma_2 = 8{,}72$ MPa, soit une réduction de 30 %.

Contrainte dans le poteau due à F : $\sigma = \dfrac{F}{S_c} = \dfrac{0{,}4058}{0{,}81} = 0{,}50$ MPa valeur faible par rapport à 10 MPa qui est une valeur courante pour un poteau et qui ne remet pas en cause sa capacité portante des charges de plancher.

Moment réduit dans la poutre raidisseuse :

$$\beta = \frac{M/2}{bd^2} = \frac{0{,}5 \times 9{,}7392}{0{,}2 \times (0{,}9 \times 3{,}4)^2} = 2{,}60 < 3.$$

Remarques

1. On a supposé que le poteau le moins comprimé, à gauche sur la figure, était toujours comprimé. Or, il peut arriver que dans les étages supérieurs, la force F soit supérieure aux charges permanentes reprises par le poteau. Il faudra alors remplacer, pour ces étages supérieurs, les valeurs $E_c S_c$ par $E_s A_s$ correspondant aux aciers du poteau.
On procède alors par approximations successives sur le numéro j de l'étage où apparaît une

traction en remplaçant $\frac{1}{E_c S_c}$ par $\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{E_c S_c} + \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{E_s A_s}$

On doit aussi prendre les valeurs F_1 et F_2 dans les formules à la place de F.

2. Pour les immeubles de très grande hauteur, on peut disposer de plusieurs étages techniques sur toute la hauteur et ainsi améliorer le confort des occupants par une diminution des déformations horizontales.
Ainsi, les deux tours jumelles du Kuala Lumpur City Center, record du monde de hauteur avec 449,32 m et 88 étages, possèdent deux étages raidisseurs, aux 38e-39e étages (8,43 m de hauteur) et au 84e étage (7,65 m).

• **Tour KLCC record du monde de hauteur**

Lieu	Kuala Lumpur, Malaisie
Hauteur des 5 sous-sols	21 m
Hauteur du pinacle	50 m
Hauteur des 88 étages	378,32 m
Hauteur totale	449,32 m, équivalent à 95 étages (7 m de plus que la Sears Tower de Chicago)
Diamètre	46,2 m
Surface de planchers	560 000 m²
Nombre de personnes	60 000
Parkings	7 000
Fondations	Radier général (13 000 m³ à 60 MPa) sur parois moulées (45 MPa)
Contreventement	Par noyau central (béton jusqu'à 80 MPa) de 23 m de côté à la base, 35 cm d'épaisseur pour les voiles centraux, de 35 à 75 cm d'épaisseur pour les voiles de pourtour du haut vers le bas
Période de vibration, 1e mode	9 secondes
Vitesse de référence du vent	35,1 m/s pour un pic de 3 s à 10 m (période de retour de 50 ans)
Coefficient d'amortissement de la structure	2 %
Planchers	Mixtes acier-béton, portée jusqu'à 12,8 m, épaisseur 11 cm pour les bureaux, 20 cm pour les étages techniques
Poteaux de façade	16 poteaux de 2,40 m de diamètre et 80 MPa à la base

9. CONCEPTION DES CONTREVENTEMENTS

9.1. FORMES DES BÂTIMENTS

On distingue (Fig. 65) [12] [13] :
- les formes simples si aucune droite joignant deux points quelconques du bâtiment ne coupe pas le contour extérieur ;
- les formes complexes dans le cas contraire.

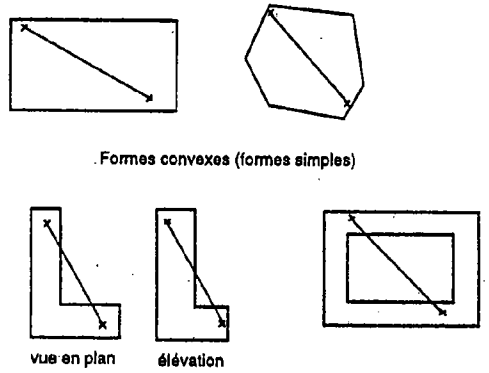


Fig. 65 – Formes simples et formes complexes.

Les formes complexes posent généralement des problèmes de calcul importants, car elles ne relèvent pas des règles applicables aux bâtiments courants. Elles occasionnent des sollicitations accrues et sont moins économiques que les formes simples. Elles seront à éviter, principalement en calcul parasismique.
On appelle excentricité la distance du centre de torsion (voir en 5.4 ci-dessus) à la résultante de l'action extérieure (vent ou séisme).
Les formes complexes ont en général des excentricités importantes et provoquent de ce fait des moments de torsion non négligeables (voir déformées sur la figure 66).

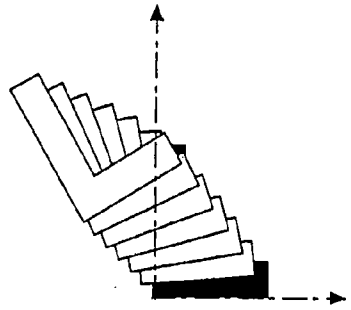
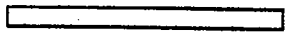
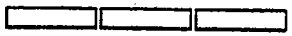
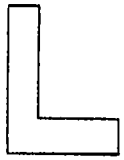
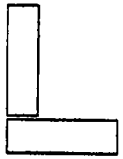
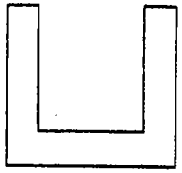
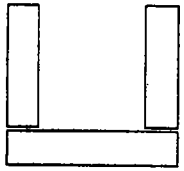
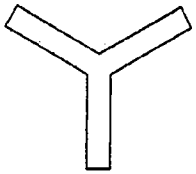
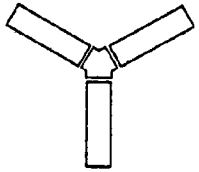
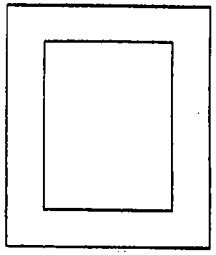
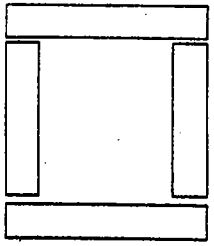


Fig. 66 – Déformées dues à la translation et à la torsion d'un bâtiment en L.

Il convient de transformer les formes complexes en formes simples en prévoyant des joints de rupture.

Type	Forme déconseillée	Forme conseillée
Bande longue		
En L		
En U		
En Y		
Tube creux		

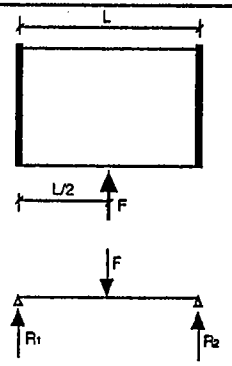
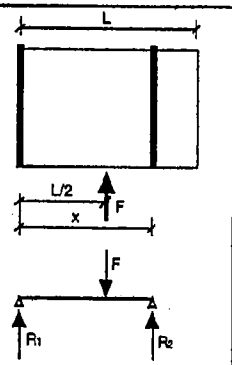
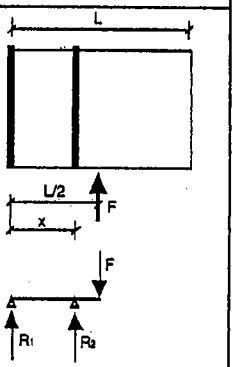
9.2. CONTREVENTEMENTS

Rechercher une structure de contreventement dont l'excentricité (voir en 9.1 ci-dessus) soit la plus faible possible. Essayer de respecter les symétries.

Pour le calcul au séisme, on essaiera de rester dans le cadre des bâtiments réguliers (voir remarque 10 du 5.7.2 ci-dessus).

Dans l'exemple du 5.7 ci-dessus, calculé au vent, le centre de torsion est en-dehors du bâtiment, ce qui est vivement déconseillé en calcul parasismique.

9.2.1. Exemple avec deux voiles parallèles

Cas 1	Cas 2	Cas 3
		
$R_1 = R_2 = \frac{F}{2}$	$R_1 = (1 - \frac{L}{2x})F < \frac{F}{2}$ $R_2 = \frac{L}{2x}F > \frac{F}{2}$	$R_1 = (1 - \frac{L}{2x})F < 0$ $R_2 = \frac{L}{2x}F > F$

On constate l'influence de l'excentricité de la structure par rapport aux sollicitations du vent. Dans le cas 3, le voile de droite reprend, à lui seul, un effort supérieur à la résultante de vent !

9.2.2. Éviter les voiles tous concourants (Fig. 67)

Dans ce cas, la résistance à la torsion est nulle. Même si le centre de torsion est situé au point de concours des voiles, l'équilibre est instable.

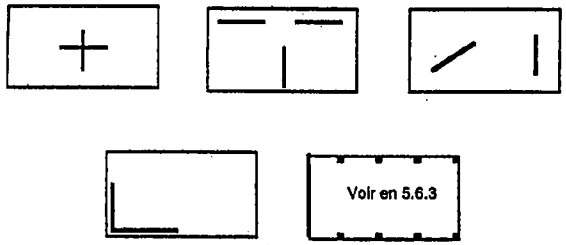


Fig. 67 – Exemple de voiles tous concourants.

9.2.3. Quelques exemples

On préférera les tubes fermés, cages d'escaliers ou d'ascenseurs avec linteaux de bonne hauteur au droit des ouvertures ou bien un contreventement en façade (tour Fiat à Paris-La Défense) (Fig. 68).
De même, on évitera de disposer des éléments rigides aux extrémités des bâtiments pour limiter les contraintes de traction dues au retrait (voir [14], page 92).

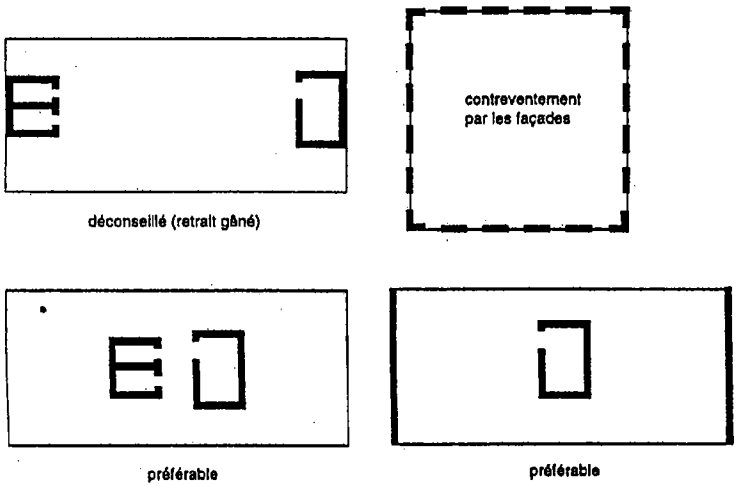


Fig. 68 – Voiles en tubes creux ou façades contreventées.

9.3. EXEMPLE DE DIMENSIONNEMENT RAPIDE

9.3.1. Données (Fig. 69)

Région 2 de vent : $q_{vn} = 0{,}7$ kN/m² (0,5 en région 1 et 0,9 en région 3)
Hauteur du bâtiment : 12 étages de 3 mètres H = 36 m
Dimensionnement en plan : A = 28 m et B = 14 m
Epaisseur des voiles : 0,20 m
Linteaux supposés tels que l'on peut considérer les cages comme des tubes fermés.

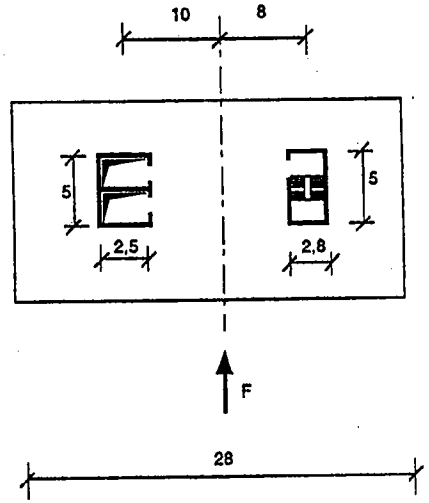


Fig. 69 – Exemple de dimensionnement rapide d'un contreventement.

• **Vent Nord-Sud**

$q_H = q_{vn}\, k_s\, k_h\, \delta\, C\, \beta$
$q_{vn} = 0{,}7$ kN/m²
$k_s = 1$ (site normal en général)

$$k_h = 2{,}5\,\frac{H+18}{H+60} = 2{,}5\,\frac{36+18}{36+60} = 1{,}406$$

$\delta = 0{,}70$ pour H ⩾ 30 m ; = 0,80 pour H = 40 m ; = 0,9 pour H ⩾ 50 m
$\delta = 0{,}76$
$C = 1{,}3$ (varie entre 1,04 et 1,69 ; vaut 1,3 en général)
$\beta = 1{,}10$ pris forfaitairement

d'où $q_v = 1{,}07$ kN/m²
F = 1,07 kN/m² × 28 m × 36 m = 1 078 kN = 1,08 MN
M = 1,08 MN × 36 m / 2 = 19,44 MNm

Inerties :

ascenseur : $I_1 = \frac{2{,}5 \times 5^3}{12} - \frac{2{,}1 \times 4{,}6^3}{12} = 9\ m^4$ $\qquad \frac{I}{v} = \frac{9}{2{,}5} = 3{,}6\ m^3$

escalier : $I_2 = \frac{2{,}8 \times 5^3}{12} - \frac{2{,}4 \times 4{,}6^3}{12} = 9{,}7\ m^4$ $\qquad \frac{I}{v} = \frac{9{,}7}{2{,}5} = 3{,}88\ m^3$

Le contreventement est légèrement dissymétrique.

Efforts repris par les voiles (Fig. 70) :

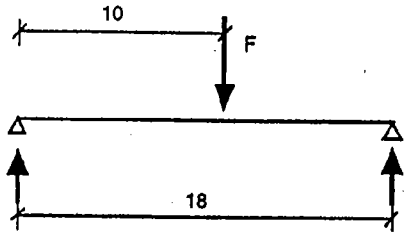


Fig. 70 – Efforts repris par les deux voiles.

$$R_1 = \frac{8}{18} F \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{10}{18} F$$

Moments :

$$M_1 = \frac{8}{18} M = 8{,}64\ \text{MNm} \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{10}{18} M = 10{,}80\ \text{MNm}$$

Contraintes : on vérifiera $\sigma < 5$ MPa pour une structure symétrique et $\sigma < 2$ ou 3 MPa pour une structure dissymétrique (valeurs approchées).

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{(I/v)_1} = \frac{8{,}64}{3{,}6} = 2{,}4\ \text{MPa} < 4{,}5\ \text{MPa (structure légèrement dissymétrique)}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{(I/v)_2} = \frac{10{,}8}{3{,}88} = 2{,}78\ \text{MPa} < 4{,}5\ \text{MPa}$$

9.4. CONCEPTION ET CALCUL DES CONTREVENTEMENTS . RÉCAPITULATION

Étapes	Références	Programmes
Définir la forme du bâtiment	chapitre 11, §. 9.1	
Dégrossissage des éléments de contreventement	chapitre 11, §. 9.2	
Calcul des sollicitations – vent – séisme	 chapitre 3, §. 4 chapitre 3, §. 5	 RAYLEIGH et STODOLA STODOLA
Pour chaque voile simple ou composé, déterminer : – les caractéristiques géométriques – les centres de torsion de chaque voile • pour les profils ouverts en U • pour les voiles de forme quelconque • pour l'inertie équivalente . des voiles à files d'ouverture . des voiles à inertie variable	 chapitre 11, §. 2.3 chapitre 11, §. 3.1 chapitre 11, §. 3.2 chapitre11, §. 6 chapitre11, §. 4 et 7	 CARAMEC LINTEAUX INEQ
Déterminer la répartition des sollicitations de vent ou séisme : – 2 voiles parallèles – n voiles parallèles – voiles quelconques	 chapitre 11, §. 5.1 chapitre 11, §. 5.3 chapitre 11, §. 5.4	
Calculer les voiles en béton armé : contraintes et aciers	chapitre 10	
Pour les voiles à une ou n files d'ouvertures, recommencer avec l'effort ainsi calculé	chapitre 11, §. 6	LINTEAUX
OU BIEN utiliser le programme CONTREV qui calcule les actions du vent, répartit les sollicitations et ferraille les voiles.		

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ALBIGES, J. GOULET – Contreventement des bâtiments, *Annales de l'ITBTP*, mai 1960.

[2] M. DIVER – Calcul pratique des tours en béton armé, Dunod 1972, 260 p.

[3] V. GUILLOT – Influence des ouvertures dans la stabilité des bâtiments de grande hauteur Refends à n files d'ouvertures, *Annales de l'ITBTP*, février 1972.

[4] M. ALBIGES, W. JALIL – Contreventement des bâtiments par façades et noyau. Analyse dynamique du séisme et effets du vent, *Annales de l'ITBTP*, décembre 1982.

[5] M. HENIN – Calcul statique des systèmes de contreventement tridimensionnels irréguliers par la méthode des matrices-transferts, *Annales de l'ITBTP*, janvier 1978.

[6] A. COIN, A. DECAUCHY, J.P. COLLIGNON – Murs de contreventement à ouvertures multiples *Annales de l'ITBTP*, février 1971.

[7] B. VLASSOV – Pièces longues en voiles minces, Eyrolles, 1962.

[8] S. TIMOSHENKO – Théorie de la stabilité élastique, Dunod, 1966.

[9] T. Y. LIN – Lateral force distribution in a concrete building storey, *ACI-Journal*, December 1951.

[10] S. MEDWADOWSKY – Lateral Force Distribution in a Random System of Shear Elements, *ACI-Journal*, Jan. 1969.

[11] H. THONIER – Le Projet de béton armé. Compléments, *Annales de l'ITBTP*, novembre 1987.

[12] V. E. DAVIDOVICI – La conception parasismique commence dès le choix de la forme des bâtiments, *Cahiers Techniques du Bâtiment*, mars 1988.

[13] Ch. ARNOLD, R. REITHERMAN – Building configuration and seismic design, John Wiley & sons, 1982.

[14] H. THONIER – Le Projet de béton armé, *SEBTP*, 1991.

12. BIELLES ET TIRANTS

1. DÉFINITIONS

On appelle :
- tirant, une barre tendue qui sera représentée par un trait épais plein ;
- bielle, un élément longiligne comprimé dans le sens de la longueur, représenté par un trait épais tireté ;
- ligne de force, la trajectoire des contraintes sur des éléments de surface successifs. Dans le cadre de l'analogie hydraulique dans un tuyau ([1] page 98), les lignes de force représentent les lignes de courant, les vitesses du courant représentent les contraintes.

Dans les structures en béton, un tirant est représenté par un ensemble d'armatures longitudinales de même centre de gravité, une bielle, par une fraction de la structure en béton, soumis à un effort de compression et dont la ligne des centres de gravité peut être représentée par une droite. Ainsi, un poteau en compression simple peut être assimilé à une bielle unique.

On peut, dans la plupart des cas, schématiser une structure par un ensemble de bielles fictives à l'intérieur du béton et de tirants en acier. Pour certaines structures courantes, on a vu :
- les semelles superficielles filantes ou rectangulaires (chapitre 4, §. 5.7) ;
- les semelles sur pieux (chapitre 5, §. 9.3 à 9.5) ;
- les poutres-cloisons (chapitre 10, §. 9.2) ;
- les voiles (chapitre 10, §. 11).

On déterminera les efforts de compression dans les bielles et l'on vérifiera que la contrainte, en ELU, ne dépasse pas $\frac{0{,}8 f_{c28}}{\gamma b}$ (BAEL 91, art. A.5.1.3).

Certains auteurs [2] [10] et le *Code-Modèle 90* [1] art. 6.2.2.2 préconisent de limiter la contrainte de compression de la bielle à $\frac{0{,}60 f_{c28}}{\gamma b}$ dans le cas où la fissuration se développe

en biais par rapport à la bielle et $\frac{0{,}40 f_{c28}}{\gamma b}$ si de plus la largeur des fissures peut être très importante.

Pour les aciers, l'effort calculé T permettra de calculer la section par : $A_s = \frac{T\gamma_s}{f_e}$

Cette schématisation de structures n'est pas nouvelle. Ritter introduisit le modèle du treillis pour l'étude de l'effort tranchant dès 1899 [1]. L'analogie du treillis pour expliquer le fonctionnement d'une poutre a été généralisée par Mörsch en 1920 [2] (Treillis de Ritter-Mörsch).

En 1934, P. Lebelle [5] [6] publiait une méthode de calcul des semelles superficielles. De même pour les semelles sur pieux avec J. Blevot [7].

Nous allons d'abord démontrer que toute force qui change de direction entraîne l'apparition d'une force radiale.

1.1. CHANGEMENT DE DIRECTION D'UNE FORCE

• Changement angulaire de direction d'une force F

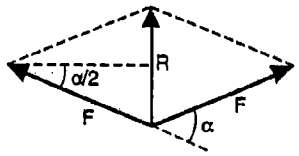


Fig. 1 – Changement de direction angulaire d'une force.

La résultante R des deux forces (Fig. 1) vaut : $R = 2\,F \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

• Changement progressif de direction d'une force

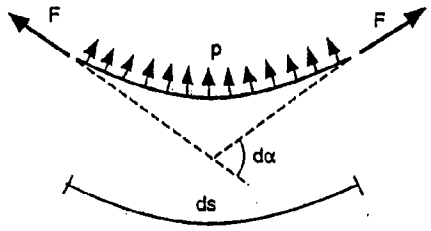


Fig. 2 – Changement de direction progressif d'une force.

La résultante R des deux forces (Fig. 2) vaut : $R = p\,ds = 2\,F \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) = F\,d\alpha$

d'où la valeur de la force radiale par unité de longueur : $p = F\frac{d\alpha}{ds} = \frac{F}{r}$ car le rayon de courbure est égal à $\frac{ds}{d\alpha}$.

Cette formule est bien connue en hydraulique (traction dans les tuyaux pour une pression p) et en béton précontraint (calcul de l'action exercée par un câble courbe sur le béton).

1.2. TYPES DE BIELLES

On distingue trois types de bielles :
- les bielles prismatiques (Fig. 3-a), où les lignes de force sont parallèles ;
- les bielles en éventail (Fig. 3-b), dans lesquelles les lignes de force sont concourantes ;
- les bielles en col de bouteille (Fig. 3c), pour lesquelles les lignes de force sont des courbes qui permettent de passer d'une petite largeur en haut à une grande largeur en bas.

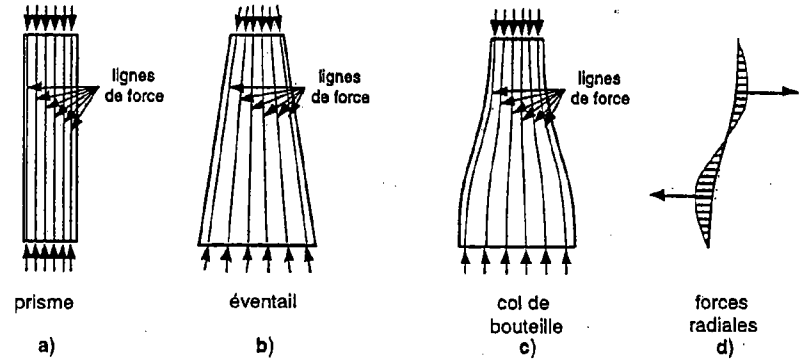


Fig. 3 – Types de bielles.

Chaque ligne de force courbe induit des forces radiales proportionnelles à sa courbure (Fig. 3-d).

1.3. BIELLES EN COL DE BOUTEILLE

On montre, à partir de la formule de Boussinesq, ([1], p. 78), que sous l'action d'une charge concentrée, il y a diffusion des contraintes et que celles-ci deviennent quasi-constantes (à

quelques pour cents près) au bout d'une distance égale à la largeur b de la pièce. Cette longueur est appelée longueur de diffusion.

Ce qui vient à considérer les éléments longs lorsque $d > b$ et quatre types d'éléments courts en fonction de la largeur d'appui a de la charge F (Fig. 4)

1.3.1 - Élément « carré » avec $a \leqslant b \leqslant d$

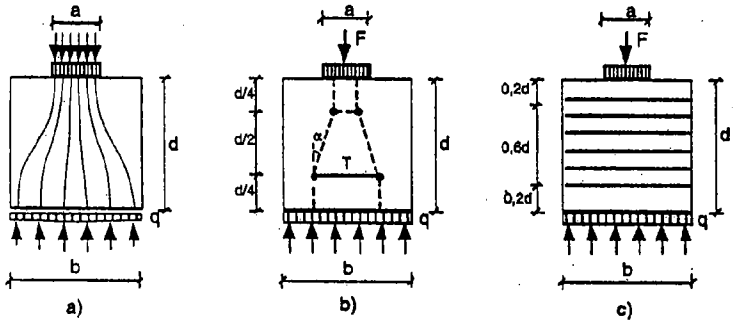


Fig. 4 – Bielles avec $d = b$.

On peut admettre que la charge q sur le grand côté est constante (Fig. 4-b).
Les lignes de force (Fig. 4-a) de chaque moitié peuvent être schématisée (Fig. 4-b) par trois bielles consécutives avec changement de direction dans chaque moitié de l'élément, une bielle horizontale d'équilibrage à la profondeur $d/4$ et un tirant horizontal d'équilibrage à la profondeur $3d/4$.

Chaque bielle verticale est située au quart de la largeur de la charge répartie.

L'angle α est tel que $\dfrac{\frac{b}{4}-\frac{a}{4}}{\frac{d}{2}} = \dfrac{b-a}{2b} = \dfrac{T}{F/2}$ d'où $T = \dfrac{F}{2} tg\ \alpha = \dfrac{F}{4}\dfrac{b-a}{b}$.

L'effort de de compression C de la bielle horizontale est égal à l'effort de traction T :

$$C = T = \frac{F}{4}\frac{b-a}{b}$$

En principe, les tractions n'apparaissent qu'à partir de la profondeur 0,5 d, où l'on trouve le point d'inflexion (Fig. 3-d), donc où la force radiale devient nulle.

Cependant, il est prudent de disposer des armatures à partir de la profondeur 0,2 d jusqu'à la profondeur 0,8 d, soit sur une hauteur 0,6 d (Fig. 4-c). Leur section totale est égale à $\dfrac{T}{\sigma_s}$.

1.3.2. Élément long avec $a \leqslant b \leqslant d$

On peut découper fictivement un élément « carré » de diffusion des contraintes ; au-delà, les lignes de force peuvent être considérées comme parallèles (Fig. 5-a). Le ferraillage est à disposer dans la partie comprise entre les profondeurs 0,2 b et 0,8 b (Fig. 5-c).

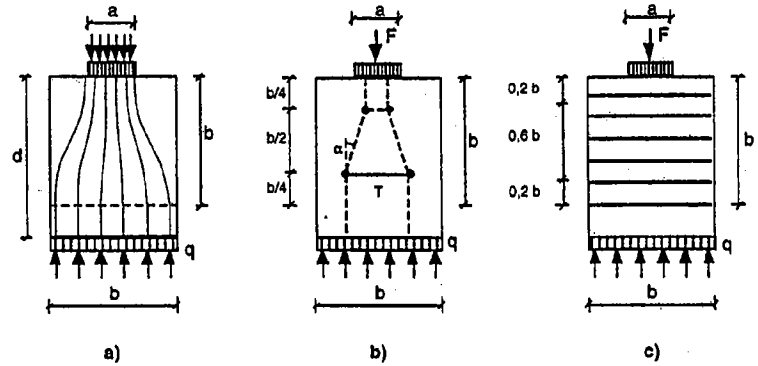


Fig. 5 – Elément long.

Comme précédemment, l'effort de traction vaut $T = \dfrac{F}{4}\dfrac{b-a}{4}$.

1.3.3. Élément court avec $a \leqslant d < b \leqslant d + a$

On considère que les lignes de force ont encore une longueur suffisante pour s'épanouir, car le débord $b - a$ est inférieur à la hauteur d, ou encore le pan coupé a une pente supérieure à 2:1 (Fig. 6).

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{b}{4}-\frac{a}{4}}{\frac{d}{2}} = \frac{b-a}{2d} = \frac{T}{F/2}$$

d'où $T = \dfrac{F}{2} tg\ \alpha = \dfrac{F}{4}\dfrac{b-a}{d}$

On disposera le ferraillage dans les 0,8 d inférieur.

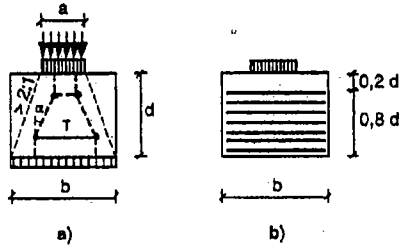


Fig. 6 – Cas $a \leqslant d < b \leqslant d + a$.

1.3.4. Élément court avec $a \leq d < d + a \leq b$

Les lignes de force ne peuvent s'épanouir que dans la zone de béton délimitée par un pan coupé de pente 2:1 (Fig. 7-b) dont la largeur à la base vaut $a + d$. Les contraintes en partie inférieure ne sont plus uniformes mais ont l'allure de la figure 7-a d'après Boussinesq.
On limite la largeur utile de b à $a + d$.

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{a+d}{4} - \frac{a}{4}}{\frac{d}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{T}{F/2} \quad \text{d'où} \quad T = \frac{F}{2}\,tg\,\alpha = \frac{F}{4}.$$

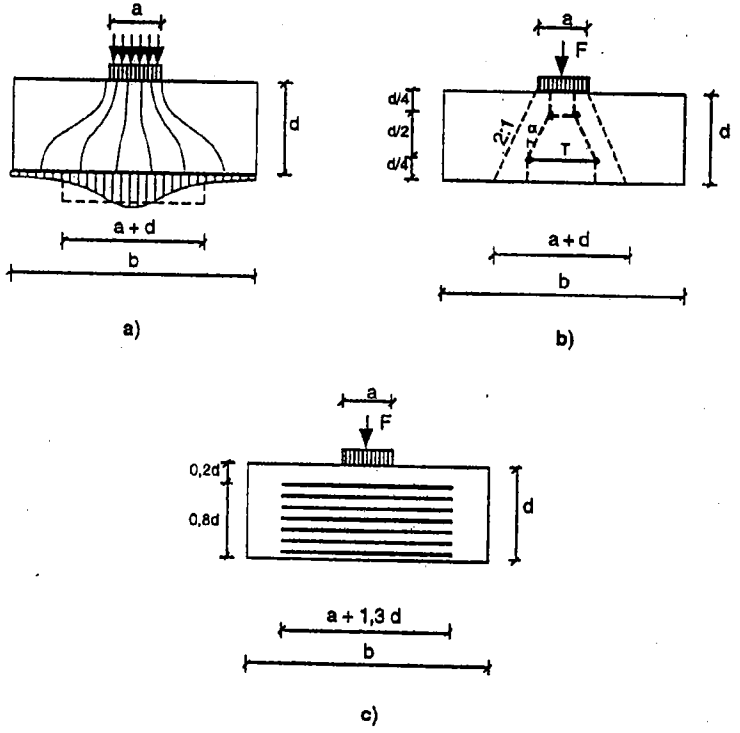


Fig. 7 – Cas $a \leq d < d + a \leq b$.

1.3.5. Élément court avec $d \leq a \leq b \leq d + a$

La largeur a de la charge en tête est importante et l'on peut admettre une transmission directe par des lignes de force verticales sous la largeur $a - d$ dans la zone centrale hachurée (Fig. 8-a). La bielle moyenne a un bord extérieur incliné à plus de 2:1. La demi-largeur de la bielle en tête vaut $d/2$.

Soit F_1 la fraction de la charge F transmise par une des deux bielles inclinées :

$$F_1 = F\,\frac{d/2}{a} = \frac{Fd}{2a}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{b}{2} - \left(\frac{a}{2} - \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}} - \frac{d}{2} = \frac{b-a}{2d} = \frac{T}{F_1} \quad \text{d'où} \quad T = \frac{F}{4}\,\frac{b-a}{a}$$

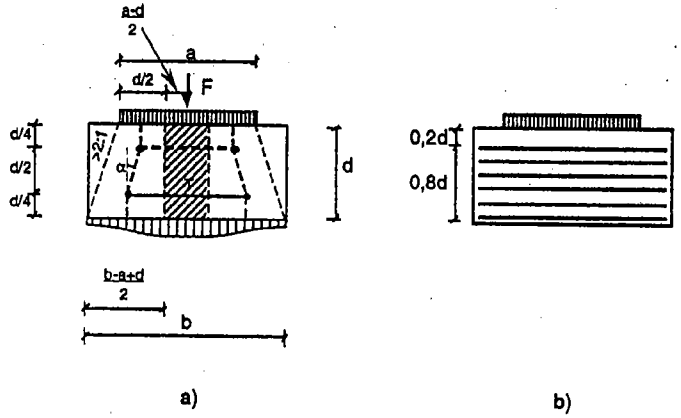


Fig. 8 – Cas $d \leq a \leq b \leq d + a$.

1.3.6. Élément court avec $d \leq a \leq d + a \leq b$

On considère trois zones (Fig. 9).
- la zone hachurée où la transmission des efforts est assurée par des lignes de force verticales dans le région centrale ;
- la zone extérieure à la ligne de pente 2:1 (zone pointillée), que l'on peut considérer comme non comprimée ;

– la zone de transmission des lignes de force épanouies de largeur égale deux fois $d/2$ en partie haute et 2 fois d en partie basse.

L'effort de traction est égal à :

$$T = F_1 \frac{\frac{d}{2} - \frac{d}{4}}{\frac{d}{2}} = \frac{F_1}{2} \quad \text{avec} \quad F_1 = \text{fraction } \frac{d/2}{2} \text{ de F} \quad \text{d'où} \quad T = \frac{F}{4}\frac{d}{a}.$$

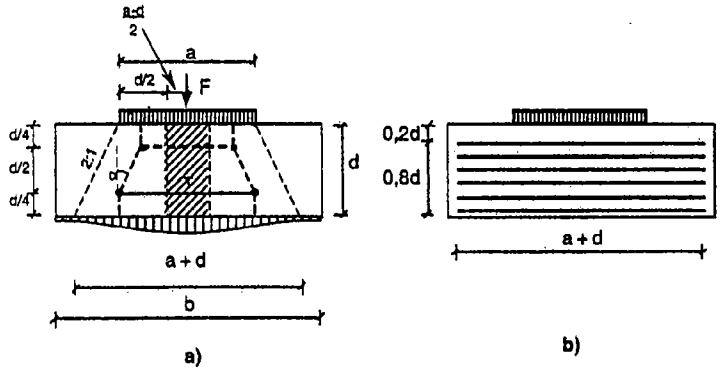


Fig. 9 – Cas $d \leq a \leq d + a \leq b$.

1.3.7. En résumé

Pour une bielle du type col de bouteille de longueur d, de petit côté a et de grand côté b, supportant une charge F, l'effort de traction T des aciers est déterminé par lecture du tableau ci-dessous en fonction des rapports a/d et b/d.

EXEMPLE

Soit une élément intérieur d'une structure béton, de longueur $d = 0{,}80$ m, recevant une charge F = 0,82 MN sur une surface $a_1 \times a_2 = 0{,}20\text{ m} \times 0{,}28\text{ m}$ à une extrémité et $b_1 \times b_2 = 0{,}56\text{ m} \times 0{,}80\text{ m}$ à l'autre extrémité.
Béton $f_{c28} = 30$ MPa et $f_e = 500$ MPa.

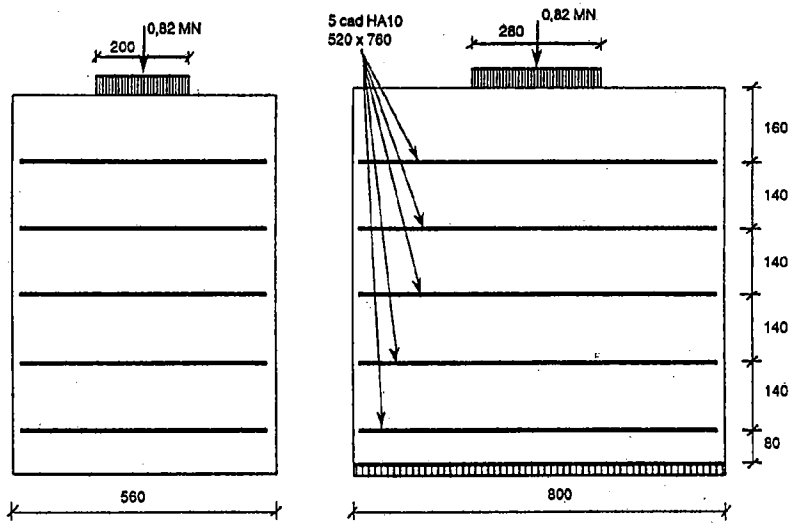


Fig. 10 – Exemple.

Pour les aciers dans la première direction, on a : $\frac{a_1}{d} = 0{,}25$; $\frac{b_1}{d} = 0{,}70$.

Par lecture du tableau I ci-dessous, on trouve : $T_1 = 0{,}161 \times 0{,}82 = 0{,}132$ MN

d'où la section totale d'acier $A_s = \frac{T_{\gamma s}}{f_e} = \frac{0{,}132 \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 3{,}06\text{ cm}^2$

sur une hauteur (voir tableau II) : $0{,}6\,d = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$ m,
soit 4 HA10 de longueur(voir tableau 3) : $0{,}7\,d = 0{,}7 \times 0{,}80 = 0{,}56$ m (cadres ou crochets en extrémités), espacés de $0{,}48 / 4 = 0{,}12$ m.

Dans l'autre direction, on trouve : $\frac{a_2}{d} = 0{,}35$; $\frac{b_2}{d} = 1{,}00$: $T_2 = 0{,}162 \times 0{,}82 = 0{,}133$ MN

d'où la section totale d'acier $A_s = \frac{T_{\gamma s}}{f_e} = \frac{0{,}133 \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 3{,}06\text{ cm}^2$

sur une hauteur $d = 0{,}8\ d = 0{,}64$ m,
soit 4 HA10 de longueur $1{,}0\,d = 0{,}80$ m (cadres ou crochets en extrémités), espacés de $0{,}64 / 4 = 0{,}16$ m.
On disposera de 5 cadres HA10 (520 × 760), espacés de 140 mm à disposer à partir de la distance $0{,}2\,d = 0{,}16$ m de la petite face.

La contrainte maximale de la bielle vaut :

$$\sigma_b = \frac{0{,}82}{0{,}20 \times 0{,}28} = 14{,}64 \text{ MM} < \frac{0{,}8 f_{c28}}{1{,}5} = 16{,}0 \text{ MPa.}$$

Tableau I. Rapport T/F

Rapport a/d

b/d	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	0,350	0,500	0,750	1,000	1,500	2,000	3,000
0,1	0,125	0,000										
0,2	0,188	0,125	0,062	0,000								
0,3	0,208	0,167	0,125	0,083	0,042							
0,5	0,225	0,200	0,175	0,150	0,125	0,075	0,000					
0,7	0,232	0,214	0,196	0,179	0,161	0,125	0,071					
1,0	0,237	0,225	0,213	0,200	0,188	0,162	0,125	0,063	0,000			
1,1	0,250	0,250	0,238	0,225	0,213	0,188	0,150	0,088	0,025			
1,2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,238	0,213	0,175	0,113	0,050			
1,3	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,237	0,200	0,137	0,075			
1,4	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,225	0,162	0,100			
1,6	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,213	0,150	0,017		
1,8	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,200	0,050		
2,0	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,083	0,000	
2,5	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,167	0,063	
3,0	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,167	0,125	0,000
4,0	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,167	0,125	0,083

Tableau II. Hauteur armée au-dessous de 0,2 d en fonction de d

Rapport a/d

b/d	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	0,350	0,500	0,750	1,000	1,500	2,000	3,000
0,1	0,600											
0,2	0,600	0,600	0,600									
0,3	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600							
0,5	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600						
0,7	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600					
1,0	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800				
1,1	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800			
1,2	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800			
1,3	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800			
1,4	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800			
1,6	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800		
1,8	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800		
2,0	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800		
2,5	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	
3,0	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	
4,0	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800

Tableau III. Longueur des aciers/d

Rapport a/d

b/d	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	0,350	0,500	0,750	1,000	1,500	2,000	3,000
0,1	0,100											
0,2	0,200	0,200	0,200									
0,3	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300							
0,5	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500						
0,7	0,700	0,700	0,700	0,700	0,700	0,700	0,700					
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000				
1,1	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100			
1,2	1,200	1,200	1,200	1,200	1,200	1,200	1,200	1,200	1,200			
1,3	1,300	1,300	1,300	1,300	1,300	1,300	1,300	1,300	1,300			
1,4	1,350	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400			
1,6	1,350	1,400	1,450	1,500	1,550	1,600	1,600	1,600	1,600	1,600		
1,8	1,350	1,400	1,450	1,500	1,550	1,650	1,800	1,800	1,800	1,800		
2,0	1,350	1,400	1,450	1,500	1,550	1,650	1,800	2,000	2,000	2,000		
2,5	1,350	1,400	1,450	1,500	1,550	1,650	1,800	2,050	2,300	2,500	2,500	
3,0	1,350	1,400	1,450	1,500	1,550	1,650	1,800	2,050	2,300	2,800	3,000	
4,0	1,350	1,400	1,450	1,500	1,550	1,650	1,800	2,050	2,300	2,800	3,300	4,000

2. ÉTUDE D'UNE POUTRE COURTE SOUS CHARGE CONCENTRÉE

Examinons d'abord une poutre de portée L voisine de deux fois sa hauteur ($L \approx 2\ z$) avec une charge concentrée F sur une longueur a, petite devant L (Fig. 11).

On admet que la transmission des efforts concentrés s'effectue par des bielles à 45°. L'effort de traction dans la membrure inférieure vaut :

$$T = \frac{F}{2}\frac{L/2}{z} = \frac{FL}{4z}$$

On retrouve bien cette valeur par la formule classique de résistance des matériaux, où le moment à mi-portée vaut $M = F\,L\,/\,4$ et le bras de levier z permet de calculer l'effort de traction de l'acier $T = \frac{FL}{4z}$.

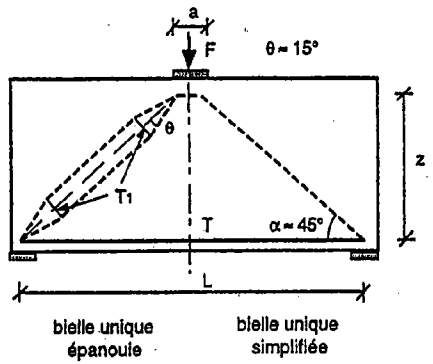


Fig. 11 – Bielle unique.

Une méthode plus raffinée consiste à considérer un épanouissement des lignes de force près des points d'application des efforts concentrés, avec un angle d'ouverture voisin de 30° ($\theta = 15°$ de la demi-figure 11-gauche, voir remarque 2).

L'effort de compression dans la bielle unique inclinée vaut : $C = \dfrac{F}{2 \sin \alpha}$.

L'effort de compression dans l'une des deux petites bielles inclinées de θ vaut :

$$C_1 = \frac{C}{2} \frac{1}{\cos \theta}$$

L'effort de traction T_1 dans les petits tirants d'équilibre des ces bielles vaut :

$$T_1 = C_1 \sin \theta = \frac{F}{4} \frac{\text{tg}\theta}{\sin\alpha}$$

L'effort de traction dans le tirant inférieur est égal à : $T = C \cos \alpha = \dfrac{F}{2} \text{tg}\ \alpha$.

Pour $\alpha = 45°$ et $\theta = 15°$, on trouve $T = 0{,}5\ F$ et $T_1 = 0{,}092\ F$, soit 18 % de l'effort T de traction du tirant principal, valeur non négligeable. Ce qui justifie la nécessité de disposer des aciers répartis dans la hauteur de la poutre pour des sollicitations importantes (voir poutres-cloisons, chapitre 10, §. 9.2).

Remarques

1. Pourquoi un angle de 45° pour les bielles ?

On démontre, en résistance des matériaux [3], que pour toute facette d'un point P d'une structure soumise à des contraintes de compression σ et de cisaillement τ, la courbe $\tau = f(\sigma)$ est représentée par un cercle, (cercle de Mohr) et que toute rotation d'un angle θ de la facette se traduit par une rotation -2θ du point sur le cercle. Ainsi, pour un point P soumis à une contrainte de compression nulle sur deux facettes perpendiculaires, l'une verticale et l'autre horizontale, par exemple un point de l'axe neutre d'une section fléchie, le cercle de Mohr est centré sur l'origine. Le point représentatif de la plus grande contrainte de traction est à $-2\theta = -90°$ de la facette horizontale, ce qui veut dire que la facette est orientée de $\theta = 45°$ sur l'horizontale. La fissure, si fissure il y a, sera inclinée à 45 °.

2. Pourquoi un angle d'épanouissement de 15° de part et d'autre de la bielle unique ?

La bielle unique (partie droite de la figure 11) couvre un angle d'épanouissement des lignes de force de 90° d'ouverture. En éliminant les lignes de force sub-horizontales qui véhiculent de faibles efforts (l'angle supérieur de 15°) et les lignes de force sub-verticales qui descendent directement vers le milieu bas de la poutre, loin de l'appui (angle de 15° près de la verticale), il reste $90° - 2 \times 15° = 60°$ à diviser en deux pour chacune des deux bielles (partie gauche de la figure) soit 30° pour chacune, d'où $\theta = 15°$.

3. ÉTUDE D'UNE POUTRE AVEC CHARGE CONCENTRÉE A MI-TRAVÉE

Pour une longueur de poutre supérieure à 2 z, la bielle à 45° partant de la charge et se dirigeant vers l'appui, ne peut atteindre ce dernier. Il faut donc relever la charge (qui est égale à l'effort tranchant) par des aciers verticaux qui la replacent en tête d'une nouvelle bielle. Si cette deuxième bielle ne peut atteindre l'appui, il faudra un deuxième acier de relevage puis une troisième bielle, ainsi de suite jusqu'à l'appui.

On peut imaginer différents systèmes de bielles et tirants pour les poutres. Par exemple, sur la figure 12, un modèle simple dans la demi-poutre droite et un modèle double dans la demi-poutre gauche des poutres situées côté gauche. On retrouve bien le modèle Ritter-Mörsch dans la demi-poutre droite.

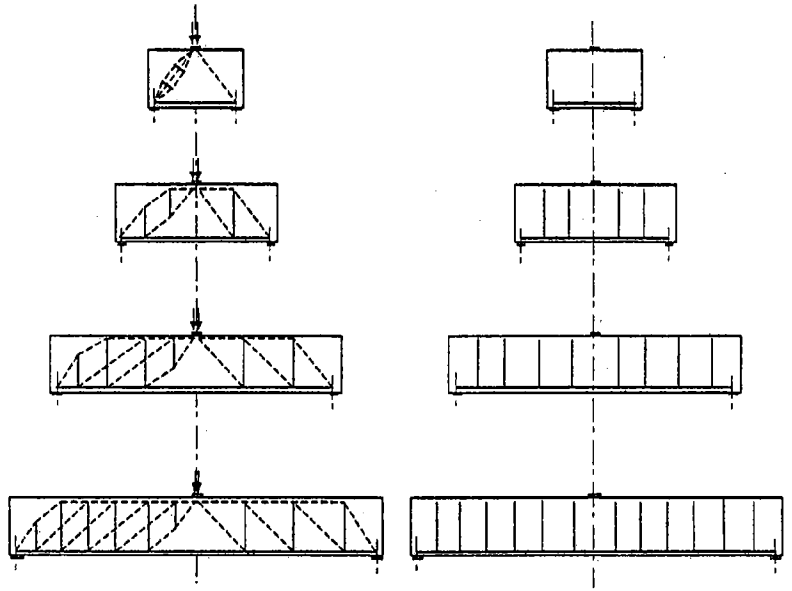


Fig. 12 – Modèles simple et double de bielles et tirants dans les poutres.

• Théorie du treillis

La théorie du treillis de Ritter-Mörsch consiste à considérer un fonctionnement de la poutre avec des bielles à 45° et des tirants verticaux. Ce modèle peut être généralisé avec des bielles d'inclinaison variable et des aciers inclinés (Fig. 13).

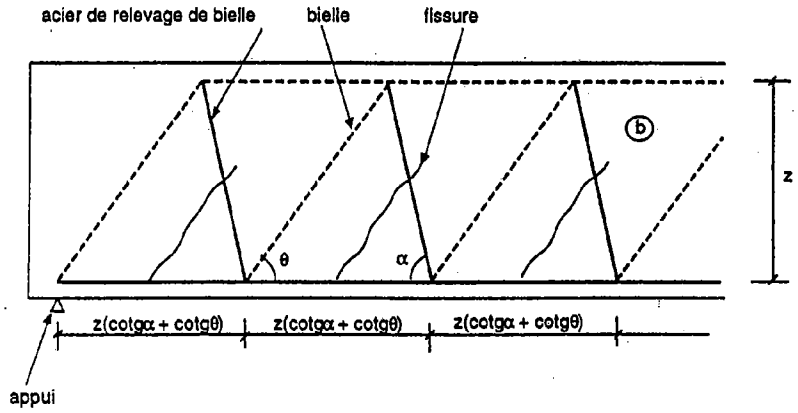


Fig. 13 – Modèle de treillis à bielles et aciers d'inclinaisons variables.

La partie de béton comprise entre deux fissures parallèles constitue une bielle de largeur z (cotg α + cotg θ). L'effort de compression dans la bielle vaut (Fig. 14) :

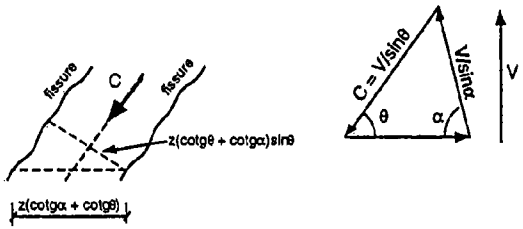


Fig. 14 – Bielle.

$C = \dfrac{V}{\sin\theta}$ et l'effort de traction dans les aciers est égal à $T = \dfrac{V}{\sin\alpha}$ pour un effort tranchant V.

La bielle a pour section droite : $A_b = b\ z\ (\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \theta)\ \sin\theta$ d'où la contrainte de compression de la bielle :

$$\sigma_{bielle} = \frac{C}{A_b} = \frac{V}{bz} = \frac{1}{(\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \theta)\sin^2\theta}$$ et l'effort tranchant repris par la bielle :

$$V = b\ z\ \sigma_{bielle}\ (\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \theta)\ \sin^2\theta$$

Formule qui correspond bien à celle de l'effort tranchant résistant donné par l'Eurocode 2 :

$$V_{Rd2} = b_w\ z\ \nu\ f_{cd}\ (\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \theta)\ /(1 + \text{cotg}^2\ \theta) \quad \text{avec} \quad 1 + \text{cotg}^2\ \theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

et $\sigma_{bielle} = \nu\ f_{cd} = \nu\ \dfrac{f_{ck}}{\gamma_c}$.

L'effort de traction dans les aciers est repris par une section d'acier par unité de longueur $\dfrac{A_t}{s}$ sur une longueur $z\ (\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \theta)$ et une contrainte σ_s :

$$\frac{V}{\sin\alpha} = \frac{A_t}{s}\ z\ (\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \theta)\ \sigma_s$$

Formule qui correspond bien à celle de l'effort tranchant résistant des aciers de l'Eurocode 2 : $V_{Rd3} = z\ A_{sw}\ f_{ywd}\ (\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \theta)\ \sin\alpha\ /\ s$.

L'Eurocode 2, ENV 1992-1 propose une méthode de calcul à l'effort tranchant avec des bielles d'inclinaison variable. L'angle θ peut être pris au choix entre 26,6° et 63,4° (la tangente de l'angle est comprise entre 0,5 et 2).

Pour des aciers verticaux, on constate que la résistance maximale de la bielle est obtenue (Fig. 15) pour un angle d'inclinaison des bielles sur l'horizontale θ de 45° et la section minimale d'acier pour un angle θ de 26,6°.

On a donc tout intérêt à prendre en compte des bielles inclinées à 26,6°, sauf cas assez rare où la condition de contrainte de la bielle serait prépondérante.

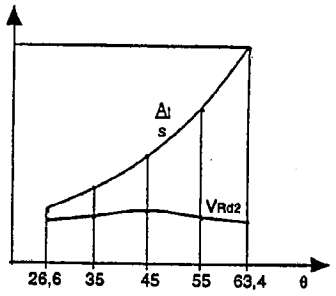


Fig. 15 – Variation de la résistance de la bielle V_{Rd2} et de la section d'acier $\dfrac{A_t}{s}$ en fonction de l'inclinaison de ces derniers.

4. ÉTUDE D'UNE POUTRE EN Té AVEC CHARGE RÉPARTIE (Fig. 16)

Nous supposons, dans ce qui suit, que la portée est un multiple de z cotg θ, où θ représente l'inclinaison des bielles (en général 45°) (Fig. 17).

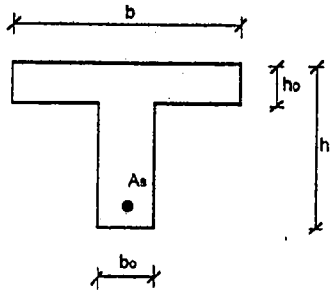


Fig. 16 – Poutre en Té.

Nous considérons un treillis simple dont les bielles sont toutes inclinées de θ sur l'horizontale. La charge répartie est supposée concentrée au droit de chaque nœud supérieur. C'est l'hypothèse retenue pour les poutres treillis métalliques.
Ainsi chaque nœud reçoit une charge $P = p\,z\,\cot g\,\theta$ à l'exception du premier pour lequel on a une charge $0{,}5\,P = \dfrac{pz\cot g\,\theta}{2}$.

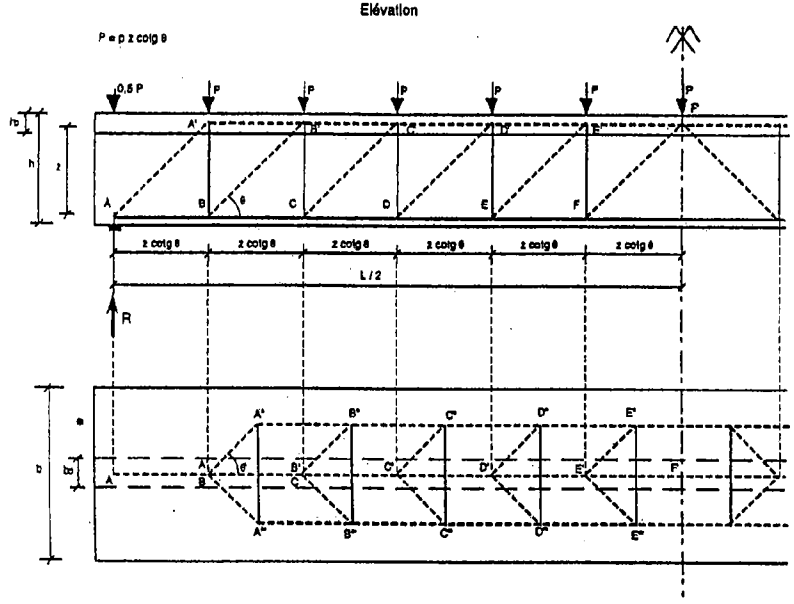


Fig. 17 – Poutre en Té - Méthode des bielles pour l'âme et la table.

4.1. ÉTUDE DE L'ÂME

La réaction d'appui R est équilibrée par une bielle unique AA′ et un tirant AB (Fig. 17).

Chaque bielle inclinée AA′, BB′, ... s'épanouit dans la table par deux bielles horizontales biaises A′A″ et A′A‴, B′B″ et B′B‴ etc. Ces bielles biaises doivent être équilibrées par des tirants horizontaux transversaux A″A‴, B″B‴ ... qui assurent la couture de la table sur la nervure.

4.1.1. Exemple numérique 1

Avec $z = 1$ m, $\theta = 45°$, $\theta' = 45°$, $L = 12$ m et une charge unité $p = 1$

On considère chaque nœud avec les efforts qui lui sont appliqués (compression si la force est dirigée vers le nœud).

• **Équilibre du nœud A** (Compression = signe + et traction = signe –) (Fig. 18)

$F_1 = 0{,}5\,p\,z\,\cot g\,\theta = 0{,}5$
$F_2 = R_1 / \sin\theta$ avec
$R_1 = 0{,}5\,p\,L - 0{,}5\,p\,z\,\cot g\,\theta = 6 - 0{,}5 = 5{,}5$
$F_2 = 5{,}5\sqrt{2}$
$F_3 = -F_2 \cos\theta = -5{,}5$

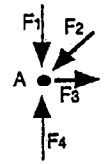


Fig. 18

• **Équilibre du nœud A′** (Dans le plan vertical). (Fig. 19)

$F_1 = p\,z\,\cot g\,\theta = 1$
$F_2 = 5{,}5\sqrt{2}$ (voir nœud A)
$F_3 = F_1 - F_2 \sin\theta = 1 - 5{,}5\sqrt{2}\,(\sqrt{2}/2) = -4{,}5$
$F_4 = F_2 \cos\theta = 5{,}5$

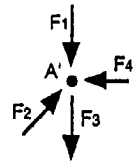


Fig. 19

• **Équilibre du nœud B** (Fig. 20)

$F_1 = -5{,}5$ (voir nœud A)
$F_2 = -4{,}5$ (voir nœud B)
$F_3 = -F2 / \sin\theta = 4{,}5\sqrt{2}$
$F_4 = F_1 + F_3 \cos\theta = -5{,}5 + 4{,}5 = -1$

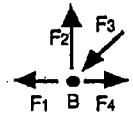


Fig. 20

• **Étude du nœud B'** (Fig. 21)

De même, on trouve les valeurs indiquées sur la figure.

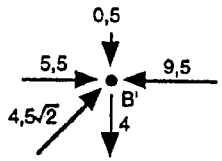


Fig. 21

• **Schéma des efforts dans les barres** (Fig. 22)

Les efforts sont donnés en valeur absolue ; les barres tendues sont en trait plein et les barres comprimées en pointillé.

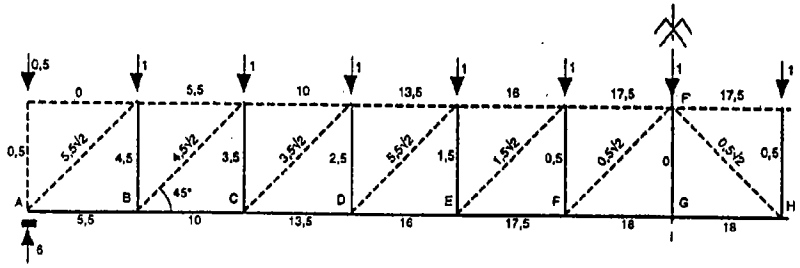


Fig. 22 – Schéma des efforts dans les barres de l'âme.

Remarques

1. On retrouve bien l'effort de traction à mi-travée :

$$T = \frac{M}{z} = \frac{pL^2}{8z} = \frac{144}{8} = 18$$

2. On constate qu'il n'est pas nécessaire de disposer de cadres à mi-travée, puisque l'effort est nul entre F' et G.

3. L'effort de traction dans le tirant inférieur sur appui est égal à l'effort tranchant à l'appui, déduction faite de la transmission directe de la charge du premier nœud.

La partie de charge transmise directement dans l'appui vaut $0{,}5\, p\, z \cot g\, \theta$, c'est-à-dire qu'elle correspond à une charge répartie de longueur $0{,}5\, z \cot g\, \theta$. Pour des aciers verticaux, on aura $0{,}5\, z$.

La plupart des règlements autorisent une transmission directe des charges dans l'appui en prenant en compte dans les calculs l'effort tranchant à l'abscisse :

- d pour l'Eurocode 2, l'ACI-318-95 (USA), la BSI 8110 (UK),
- $0{,}5\, d$ pour la DIN 1045 (D),
- $\frac{5h}{6}$ pour le BAEL 91 (valeur peu différente de $d \approx 0{,}9\, h$)

Le BAEL autorise de ne pas prendre en compte les charges situées à moins de $0{,}5\, h$ de l'appui et pour les abscisses x comprises entre $0{,}5\, h$ et $1{,}5\, h$ de n'en prendre qu'une fraction $\frac{x}{1{,}5\, h}$ (l'aire de la partie pointillée de la figure 23 est égale à $\frac{5h}{6}$).

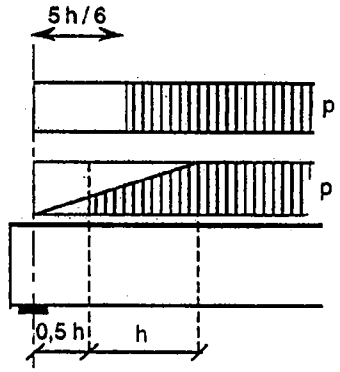


Fig. 23 – Transmission des charges directement à l'appui suivant le BAEL 91.

L'effort de traction dans la barre AB est égale à l'effort tranchant à l'appui, diminué de la part de charge transmise directement. Ainsi, l'acier de glissement $A_g = \frac{V_u \gamma_s}{f_e}$ est à calculer avec l'effort tranchant **réduit**.

4. L'effort de traction dans le tirant inférieur est à décaler de z vers l'appui le plus proche. L'effort de compression dans la bielle horizontale supérieure est à calculer avec le moment non décalé de z.

On retiendra qu'il est préférable de calculer la section d'acier à une abscisse donnée, avec le moment à cette même abscisse, de prolonger cette section d'acier de $z = 0{,}8\, h$ vers l'appui le plus proche, plutôt que de décaler la courbe des moments de z. En effet dans ce dernier cas, on calculerait la résistance du béton avec un moment plus élevé que celui qu'il doit supporter réellement.

De plus, pour la vérification de la section du béton, on peut tenir compte du fait que la section d'acier réellement mise en place sera plus élevée que celle nécessaire par le calcul à l'abscisse étudiée, car elle a été déterminée pour une abscisse décalée de z du côté du moment le plus élevé.

5. Au droit de l'appui, les cadres ne sont pas nécessaires, car la bielle verticale est comprimée.

4.1.2. Exemple numérique 2

Appliquons les résultats précédents à une section 0,30 × 1,2 m et une charge p_u = 120 kN/m (Fig. 24), un béton de 25 MPa et un acier de 500 MPa, avec reprise de bétonnage entre l'âme et la table.

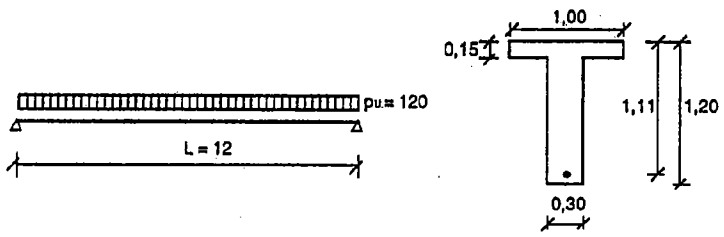


Fig. 24 – Exemple numérique.

a) Méthode des bielles

Avec z = 1 m (≈ 0,9 d et d = 0,9 h = 1,11 m). On tire les valeurs des efforts de traction des tirants verticaux de la figure 22 en multipliant les valeurs par p_u = 0,12 MN/m (Fig. 25).

La section d'acier totale A_{tt} à disposer sur une longueur z est donnée par $A_{tt} = \dfrac{V_u}{z\sigma_s}$ avec

$\sigma_s = \dfrac{500}{1,15} = 434,8$ MPa.

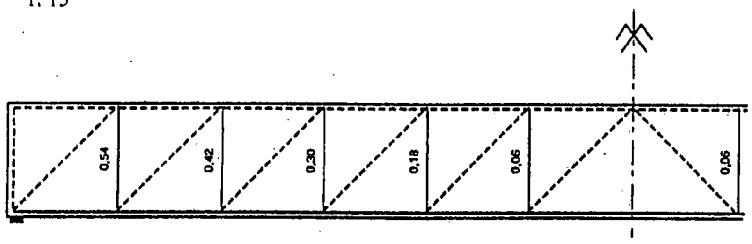


Fig. 25 – Méthode des bielles. Traction dans les tirants verticaux.

x (m)	$\frac{V_u}{p}$ (m)	V_u (MM)	A_{tt} (cm²)	$\frac{A_{tt}}{s}$ (cm²/m)
1	4,5	0,54	12,42	12,42
2	3,5	0,42	9,66	9,66
3	2,5	0,30	6,90	6,90
4	1,5	0,18	4,14	4,14
5	0,5	0,06	1,38	1,38
6	0	0	0	0

b) Méthode classique

Pour une charge répartie p_u, l'effort tranchant vaut $V_u = p_u\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0,12\,(6 - x)$

la contrainte de cisaillement : $\tau_u = \dfrac{V_u}{bd}$;

la section d'acier nécessaire : $\dfrac{A_t}{s} = \dfrac{(\tau_u - 0,3kf_{t28})b_{\gamma s}}{0,9\,f_e}$ avec reprise de bétonnage, $k = 0$,

d'où :

$$\frac{A_t}{s} = \frac{V_u\gamma_s}{0,9\,f_e} = \frac{0,12(6-x)\times 1,15\times 10^4}{0,9\times 1,11\times 500} \text{ en cm}^2/\text{m}$$

A l'abscisse d = 1,11 m, $\dfrac{A_t}{t} = 16,577 - 2,7628 \times 1,11 = 13,51$ cm²/m que nous obtenons

avec 1 cadre HA8 + 1 épingle HA8, $A_u = 3 \times 0,5 = 1,5$ cm² et $s = \dfrac{A_u}{13,51} = 0,111$ m.

Pour une section nécessaire $\dfrac{A_t}{s}$, l'espacement est donné par $s = \dfrac{A_u}{A_t/s}$.

• *Pourcentage minimal* : $\dfrac{0,4\,b_u}{f_e} = \dfrac{0,4\times 0,3\times 10^4}{500} = 2,4$ cm²/m qui correspond à un

espacement $\dfrac{1,5}{2,4} = 0,625$ m et à une abscisse x tirée de l'équation

$\dfrac{A_t}{s} = 16,577 - 2,7628\,x = 2,4$ d'où $x = 5,13$ m

Le pourcentage minimal sera déterminant à partir de l'abscisse 5,13 m.

• *Espacement maximal* : $s \leqslant 0,40$ m, ce qui correspond à une section d'acier :

$\dfrac{1,5}{0,4} = 3,75$ cm²/m et à une abscisse $x = 4,643$ m.

L'espacement maximal sera déterminant à partir de l'abscisse 4,643 m.

Nous disposerons les cadres par groupes de $n \approx$ entier (0,5 L) = 6.

x (m)	$\frac{A_t}{s}$ (cm²/m)	s (m)	Abscisse cumulée avec 6 s (m)
d = 1,11	13,51	0,111	1,766
1,776	11,67	0,128	2,534
2,534	9,55	0,157	3,476
3,476	6,95	0,216	4,772 > 4,643

Avec 10 espacements de 111 mm sur la longueur d, on a :

n s (mm)	abscisse cumulée (mm)	L'abscisse de 4 643 mm correspondant à l'espacement maxi de 0,40 m, plus défavorable que le pourcentage minimal.
50	50	
(10 + 6) × 111	1 826	
6 × 128	2 594	
6 × 157	3 536	
6 × 216	4 832	3 536 + 6 × 216 = 4 832 > 4 643
		mais avec 5 × 216 → 4 616 < 4 643 donc n = 6
3 × 389	5 999	$\frac{6\,000 - 4\,832}{400} = 2{,}92 \rightarrow 3$ et $\frac{6\,000 - 4\,832}{3} = 389$

Le nombre d'espacement est de : $2 \times (16 + 6 + 6 + 6 + 3) = 74$ soit 75 cadres pour la travée entière.

c) Méthode économique

La méthode précédente prend l'enveloppe au-dessus de la valeur nécessaire (Fig. 27-courbe b).
La méthode des bielles prend l'enveloppe au-dessous (Fig. 27-courbe a).
La méthode proposée consiste à se situer à cheval sur la droite représentative de la section d'acier nécessaire (Fig. 27-courbe c).

L'espacement nécessaire peut s'écrire sous la forme :

$$s = \frac{A_u}{\alpha - \beta x} = \frac{1{,}5}{16{,}577 - 2{,}7628x} \quad \text{soit} \quad \alpha = 16{,}577 \text{ et } \beta = 2{,}7628.$$

On commence à partir de A, d'abscisse x_1 (Fig. 26) par disposer 0,5 n espacements s_1 (s_1 calculé à l'abscisse $x_1 = d$) et non $n\,s_1$ comme précédemment. Les points B, C et D sont à l'abscisse $x'_1 = x_1 + 0{,}5\,n\,s_1$.
On détermine le point E d'abscisse x_2 tel que $DE = EF = 0{,}5\,n\,s_2$.
Les deux inconnues x_2 et s_2 sont déterminées à partir des deux équations :

$$x_2 = x'_1 + 0{,}5\,n\,s_2 \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{A_u}{\alpha - \beta x_2}$$

En éliminant x_2, on obtient une équation du 2° degré en s_2 :

$$0{,}5\,n\,\beta\,s_2^2 + (\beta x'_1 - \alpha)\,s_2 + A_u = 0\,.$$

La plus petite racine donne s_2 et l'on calcule $x_2 = x'_1 + 0{,}5\,n\,s_2$
On procède de même pour déterminer l'espacement suivant s_3 racine de l'équation :

$$0{,}5\,n\,\beta\,s_3^2 + (\beta x'_2 - \alpha)\,s_3 + A_u = 0 \quad \text{puis} \quad x_3 = x'_2 + 0{,}5\,n\,s_3 \quad \text{etc.}$$

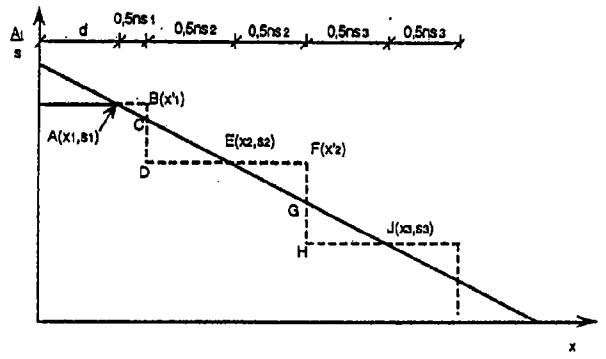


Fig. 26 – Méthode proposée. Calcul des espacements.

APPLICATION NUMÉRIQUE

• $x_1 = d = 1{,}11$ m

$$s_1 = \frac{A_u}{\alpha - \beta x_1} = \frac{1{,}5}{16{,}577 - 2{,}762\,8 \times 1{,}11} = 0{,}111 \text{ m}$$

$x'_1 = x_1 + 0{,}5\,n\,s_1 = 1{,}11 + 0{,}5 \times 6 \times 0{,}111 = 1{,}443$ m

s_2 racine de l'équation : $0{,}5\,n\,\beta\,s_2^2 + (\beta x'_1 - \alpha)\,s_2 + A_u = 0$

$0{,}5 \times 6 \times 2{,}762\,8\,s_2^2 + (2{,}762\,8 \times 1{,}443 - 16{,}577)\,s_2 + 1{,}5 = 0$

$8{,}288\,4\,s_2^2 - 12{,}59\,s_2 + 1{,}5 = 0$ de racine $s_2 = 0{,}130$ m

• $x'_2 = x'_1 + n\,s_2 = 1{,}443 + 6 \times 0{,}130 = 2{,}223$ m

Équation : $0{,}5\,n\,\beta\,s_3^2 + (\beta x'_2 - \alpha)\,s_3 + A_u = 0$

$8{,}288\,4\,s_3^2 - 10{,}435\,s_3 + 1{,}5 = 0$ de racine $s_3 = 0{,}166$ m

• $x'_3 = x'_2 + n\,s_3 = 3{,}219$ m

Équation : $0{,}5\,n\,\beta\,s_4^2 + (\beta x'_3 - \alpha)\,s_4 + A_u = 0$

$8{,}288\,4\,s_4^2 - 7{,}683\,5\,\sigma_4 + 1{,}5 = 0$ de racine $s_4 = 0{,}279$ m

• $x'_4 = x'_3 + n\,s_4 = 4{,}893$ m

Équation : $0{,}5\,n\,\beta\,s_5^2 + (\beta x'_4 - \alpha)\,s_5 + A_u = 0$

$8{,}2884\,s_5^2 - 3{,}0586\,s_5 + 1{,}5 = 0$ dont le déterminant Δ vaut $-4{,}0375 < 0$

Essayons une valeur plus petite de l'entier n : $n = \frac{(\beta x'_4 - \alpha)^2}{2A_u\beta} = 1{,}128$ soit $n = 1$ d'où

l'équation : $1{,}381\,4\ s_5^2 - 3{,}058\,6\ s_5 + 1{,}5 = 0$ dont la racine vaut $0{,}733 > 0{,}40$ m.

On obtient la série d'espacements suivante :

n s (mm)	abscisse cumulée (mm)	L'abscisse de 4 643 mm correspondant à l'espacement maximal de 0,40 m
50	50	
(10 + 3) × 111	1 493	
6 × 130	2 273	
6 × 166	3 269	
5 × 275	4 644	$3\,269 + 6 \times 279 = 4\,943 > 4\,643$ donc $n = 5$ et $\dfrac{4\,643 - 3\,269}{5} = 275$
3 × 387	5 805	$\dfrac{6\,000 - 4\,644}{400} = 3{,}39 \rightarrow 3{,}5^*$
0,5 × 390	6 000	$\dfrac{6\,000 - 4\,644}{3{,}5} = 387$

* Un entier donne un cadre à mi-travée, un demi donne un espacement à cheval sur l'axe de mi-travée.

Le nombre d'espacement est de : $2 \times (13 + 6 + 6 + 5 + 3{,}5) = 67$ soit 68 cadres au lieu de 75, soit une économie de 10 % pour la travée entière.

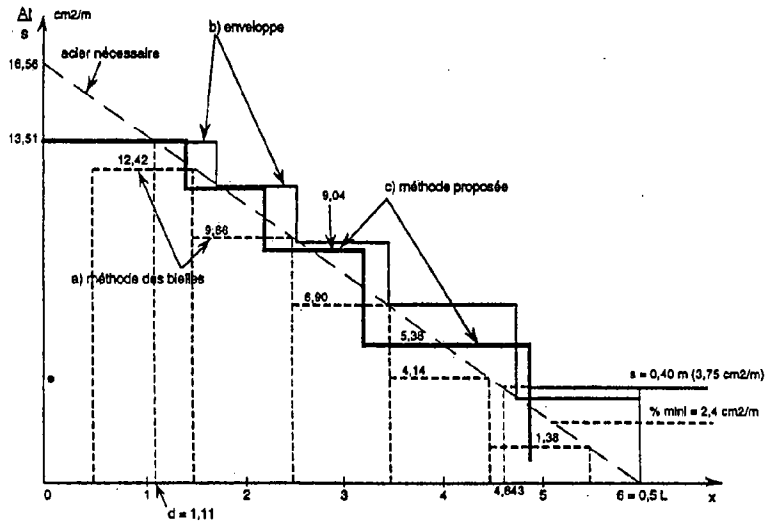


Fig. 27 – Aciers d'effort tranchant suivant la méthode des bielles, la méthode classique et la méthode proposée.

4.2. ÉTUDE DE LA TABLE

Sur la vue en plan de la poutre (Fig. 17), on constate que :
- l'effort de compression dans les bielles inclinées de l'âme ne commence à se diffuser dans la table qu'à partir de l'abscisse $z \operatorname{cotg} \theta + 0{,}5\ b_n \operatorname{cotg} \theta'$
- l'effort de traction dans le tirant A″A‴ ne s'exerce globalement qu'à l'abscisse $z \operatorname{cotg} \theta + 0{,}5 b_n \operatorname{cotg} \theta' + 0{,}25\ (b - b_n) \operatorname{cotg} \theta'$ et qu'il ne commence son action qu'à partir de l'abscisse :
  $z \operatorname{cotg} \theta + 0{,}5 b_n \operatorname{cotg} \theta' + 0{,}25\ (b - b_n) \operatorname{cotg} \theta' - 0{,}5 \operatorname{cotg} \theta$
  $$= \frac{z \operatorname{cotg} \theta + b_n \operatorname{cotg} \theta' + 0{,}5\ (b - b_n) \operatorname{cotg} \theta'}{2}$$

4.3. EXEMPLE NUMÉRIQUE

4.3.1. Pour une charge unité $p = 1$

Pour une largeur efficace $b = 1$ m, une épaisseur d'âme $b_n = 0{,}30$ m, une épaisseur de table $h_n = 0{,}15$ m, un bras de levier $z = 1$ m, une inclinaison des bielles $\theta = 45°$, on obtient :

Équilibre du nœud A′ (Dans le plan horizontal) (Fig. 28)

La répartition des efforts, suivant la partie reprise par l'âme et celles reprises par les débords de la table, est supposée s'effectuer au prorata des largeurs b_n et $0{,}5\ (b - b_n)$, à condition que b corresponde à la largeur efficace de la table.

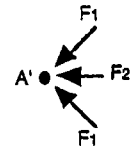


Fig. 28 – Nœud A′.

$$F_2 = F_{AA'} \frac{b_n}{b} \cos \theta = 5{,}5\sqrt{2} \times 0{,}3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}65$$

$$F_1 = F_{AA'} \frac{b - b_n}{2b} \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} = 5{,}5\sqrt{2}\ \frac{0{,}35}{1} = 1{,}925\sqrt{2}$$

Équilibre du nœud A″ (Fig. 29)

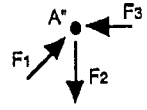


Fig. 29 – Nœud A″.

$F_1 = 1{,}925\sqrt{2}$

$F_2 = -F_1 \sin \theta' = 1{,}925$

$F_3 = F_1 \cos \theta' = 1{,}925$

Schéma des efforts (Fig. 30)

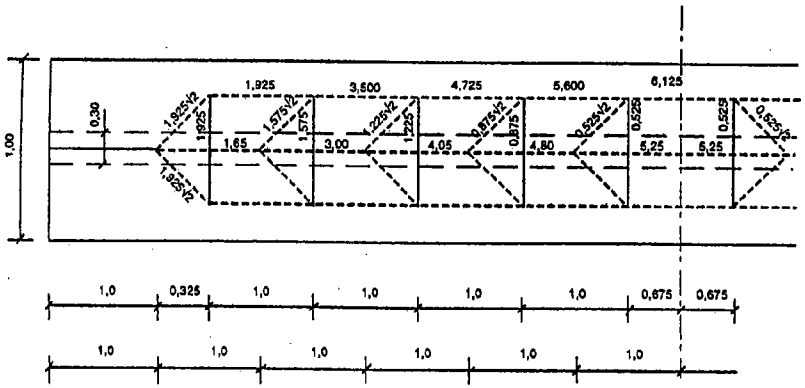


Fig. 30 – Efforts dans les bielles et tirants de la table de compression.

4.3.2. Pour une unité de charge $p = 0{,}08$ MN/m

On obtient :

- un moment à mi-travée : $M = \dfrac{pL^2}{8} = \dfrac{0{,}08 \times 12^2}{8} = 1{,}44$ MNm ;

- un effort tranchant à l'appui : $V = \dfrac{pL}{2} = \dfrac{0{,}08 \times 12}{2} = 0{,}48$ MN.

Par la méthode classique, la variation maximale de l'effort de compression de la table vaut $\dfrac{M}{z}$ entre les abscisses des points de moment nul et de moment maximum, M désignant le moment maximal.

Le débord de table de largeur $\dfrac{b - b_0}{2}$ en reprend une fraction F_f :

$$F_f = \frac{M}{z}\,\frac{b - b_0}{2b} = \frac{1{,}44}{1}\,\frac{0{,}35}{1} = 0{,}504 \text{ MN}$$

D'après les résultats de la méthode des bielles (Fig. 30), la compression maximale F_f de la partie extérieure de table vaut 6,125 unités de charge, soit $6{,}125 \times 0{,}08 = 0{,}49$ MN pour un débord de 0,35 m.

La légère différence (0,504 au lieu de 0,49) provient du fait que la dernière bielle, près de la mi-travée, n'a pas pu s'épanouir dans la table, donc l'effort déterminé par la méthode des bielles est légèrement inférieur à celui de la méthode classique .

Le cisaillement table-nervure maximal vaut :

$$\frac{1{,}925 \times 0{,}08\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{z\, h_0} = \frac{0{,}154}{0{,}15} = 1{,}03 \text{ MPa}$$

Le cisaillement moyen calculé par l'équilibre du débord de table vaut :

$$\tau = \frac{F_f}{0{,}5\, L h_0} = \frac{0{,}504}{0{,}5 \times 12 \times 0{,}15} = 0{,}56 \text{ MPa}$$

Le cisaillement maximal calculé par la méthode classique vaut [4] p. 70 :

$$\tau = \frac{V(b - b_0)}{2\, h_0\, b\, z} = \frac{pL}{4}\,\frac{b - b_0}{h_0\, b\, z} \quad \text{puisque} \quad V = \frac{pL}{2} \text{ à l'appui.}$$

On trouve ici : $\tau = \dfrac{0{,}48 \times 0{,}7}{2 \times 0{,}15 \times 1 \times 1} = 1{,}12$ MPa > 1,03 MPa, valeur donnée par la méthode des bielles.

4.3.3. Répartition des aciers (Fig. 31)

La section maximal d'acier de liaison table-nervure vaut : $\dfrac{1{,}925p}{\sigma_s}$ par unité de longueur pour une longueur $z = 1$ m, soit pour un acier de 500 MPa de limite élastique :

$$\left(\frac{A_l}{s}\right)_l = \frac{1{,}925 \times 0{,}8 \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 3{,}54 \text{ cm}^2\text{/m} \quad \text{pour une charge de 0,08 MN/m .}$$

Alors que la méthode classique donne pour l'abscisse $x = 0$ et $V = 0{,}48$ MN

$$\left(\frac{A_l}{s}\right)_l = \frac{V(b - b_0)\gamma_s}{2\, z\, b\, f_e} = \frac{0{,}48 \times 0{,}7 \times 1{,}15 \times 10^4}{2 \times 1 \times 1 \times 500} = 3{,}86 \text{ cm}^2\text{/m.}$$

La valeur moyenne de la section d'acier reprenant l'effort de compression du débord de table vaut :

$$\left(\frac{A_l}{s}\right)_l = \frac{F_f}{0{,}5\, L \sigma_s} \quad \text{avec} \quad F_f = 0{,}504 \text{ MN, soit} \quad \left(\frac{A_l}{s}\right)_l = \frac{0{,}504 \times 1{,}15 \times 10^4}{500 \times 6} = 1{,}93 \text{ cm}^2\text{/m.}$$

On retrouve bien la moitié de la valeur précédente puisque la courbe d'effort tranchant a une l'allure triangulaire pour une charge répartie. Sa valeur moyenne est bien égale à la moitié de sa valeur maximum.

C'est pourquoi le BAEL 91, art. B6.7.2 propose, pour les bâtiments pour lesquels les cisaillements ne dépassent pas certaines valeurs, de prendre la valeur moyenne.

BAEL 91. Art. B.6.7.2

Bâtiments avec charges d'exploitation modérées	Avec reprise de bétonnage vertical	Sans reprise de bétonnage vertical
Pas de vérification de la contrainte des aciers si :	$\tau \leqslant 0{,}025\, f_{c28}$	$\tau \leqslant 0{,}05\, f_{c28}$
Répartition uniforme et moyenne des aciers si :	$\tau \leqslant 0{,}05\, f_{c28}$	$\tau \leqslant 0{,}10\, f_{c28}$

Nous avons :

$$\tau = \frac{V}{0{,}9\, d\, h_n}\,\frac{b - b_n}{2b} = \frac{0{,}48}{0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}15}\,\frac{0{,}7}{2} = 1{,}38 < 0{,}10 f_{c28} = 2{,}5 \text{ MPa}$$

mais $> 0{,}05 f_{c28} = 1{,}25$ MPa
donc, en supposant qu'il n'y a pas de reprise de bétonnage vertical, on peut prendre la valeur moyenne des aciers, soit 1,93 cm²/m à répartir uniformément sur toute la travée.

L'Eurocode 2 propose de prendre la valeur moyenne du glissement

Effort de glissement moyen par unité de longueur (vérification de la compression de la bielle)	$v_{Sd} = \frac{b_f - b_w}{2b_f}\,\frac{M_{Sd}}{z}\,\frac{1}{a_v} \leqslant 0{,}2\, f_{cd}\, h_f$
Acier total de liaison table-nervure par unité de longueur	$\frac{A_{sf}}{s_f} = \frac{v_{Sd} - 2{,}5\tau_{Rd} h_f}{f_{yd}}$

avec :

$\tau_{Rd} = 0{,}035\, f_{ck}^{2/3}$ (0,30 MPa pour $f_{ck} = 25$ MPa)

$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1{,}15} = 434{,}8$ MPa

b_f = largeur totale de table = $b_w + \frac{L_n}{5}$

$z = 0{,}9\, d$

L_n = distance entre points de moments nuls
a_v = distance entre points de moment maximal et de moment nul ($a_v = 0{,}5\, L_n$ pour une charge répartie uniforme).

On trouve ainsi : $v_{Sd} = \frac{0{,}7}{2}\,\frac{1{,}44}{1}\,\frac{1}{6} = 0{,}084$ MN/m $< 0{,}2 \times 16{,}67 \times 0{,}15 = 0{,}50$ MN/m

$$\frac{A_{sf}}{s_f} = \frac{v_{Sd} - 2{,}5\, \tau_{Rd}\, h_f}{f_{yd}} = \frac{(0{,}084 - 2{,}5 \times 0{,}30 \times 0{,}15) \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = -0{,}66 \text{ cm}^2 < 0$$

soit $\frac{A_{sf}}{s_f} = 0$

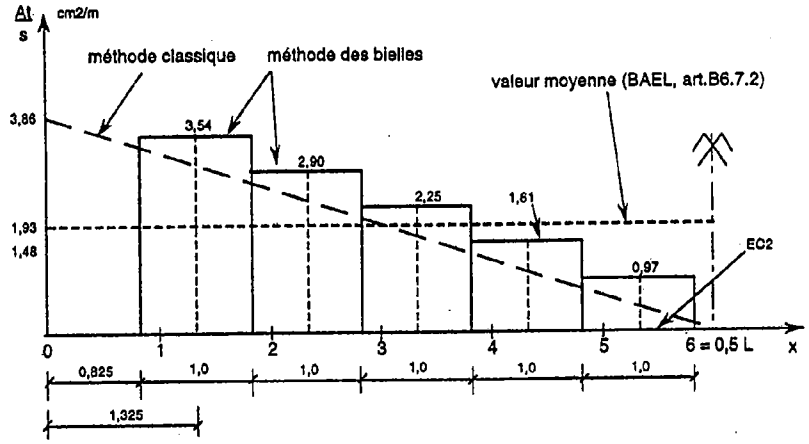


Fig. 31 – Quantité d'aciers transversaux.

Remarque

Par la méthode des bielles, on trouve que la section d'acier de liaison table-nervure n'est pas proportionnelle à la valeur de l'effort tranchant. En particulier, son maximum n'a pas lieu à l'appui (point d'effort tranchant maximal), mais compte tenu de la longueur de la bielle d'appui (z = 1 m) et de la demi-largeur de l'âme ($\frac{b_w}{2} = 0{,}15$ m), les aciers ne sont nécessaires qu'à partir de l'abscisse 1,15 m.

5. ÉTUDE D'UN ANGLE DE PORTIQUE AVEC MOMENT NÉGATIF

5.1. *ÉLÉMENTS DE MÊME HAUTEUR h* (Fig. 32)

On a : $C_1 = T$; $C_2 = T\sqrt{2}$ avec $\sigma_b \leq \dfrac{0{,}8 f_{c28}}{\gamma b}$.

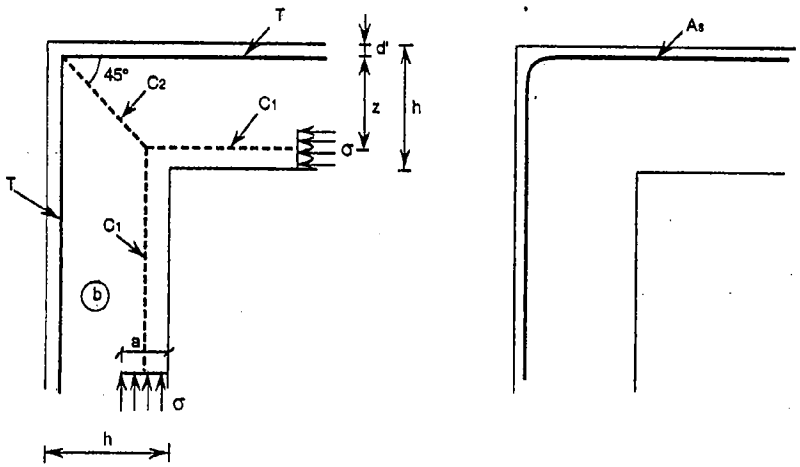


Fig. 32 – Portiques avec éléments de même hauteur sous moment négatif.

La largeur a de béton comprimé est déterminée par la condition : $\sigma = \dfrac{C_1}{ab} \leq \dfrac{0{,}8 f_{c28}}{\gamma b}$, à condition de limiter a à 0,5 h.

Remarques

1. Les efforts indiqués ci-dessus ne tiennent compte que du moment, il convient de considérer l'effort tranchant de la traverse comme une force normale dans le poteau et vice-versa.

2. Les armatures d'un tirant doivent être ancrées totalement au-delà de son arrêt, soit 45 Ø en scellement droit, ou un crochet à 135° avec une partie droite en retournement de 11 Ø au lieu de 5 minimum, ou un U ou encore un cadre.

3. Il faut s'assurer que chaque tirant est constitué d'un nombre suffisant de barres pour que la ou les bielles prenant appui dessus aient une longueur de contact suffisante (voir exemple figure 38 ci-après).

EXEMPLE

$h = 0{,}50$ m ; épaisseur $b = 0{,}4$ m ; moment ELU $M_u = 0{,}37$ MNm
$f_{c28} = 25$ MPa ; $f_e = 500$ MPa ; distance du tirant au parement $d' = 0{,}04$ m

Contrainte de calcul du béton $\sigma_b = \dfrac{0{,}8 f_{c28}}{\gamma b} = \dfrac{0{,}8 \times 25}{1{,}5} = 13{,}33$ MPa.

On a les relations :

$$\sigma_b = \frac{C}{ab} = \frac{M_u}{zab} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{M_u}{zb\sigma_b} \quad \text{et} \quad z = h - d' - \frac{a}{2}.$$

En partant d'une valeur *a priori* de $z = 0{,}8\ h = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4$ m.

L'effort de traction vaut $T = \dfrac{M_u}{z} = 0{,}925$ MN $= ab\ \dfrac{0{,}8 f_{c28}}{\gamma b}$

Par approximations successives, on obtient :

z	a
0,4000	0,1735
0,3733	0,1659
0,3670	0,1691
0,3655	0,1899
0,3651	0,1901
0,3650	0,1901

$$T = \frac{M_u}{z} = \frac{0{,}37}{0{,}3724} = 0{,}993 \text{ MN}$$

et la section d'acier : $A_s = \dfrac{1{,}15T}{f_e} = 22{,}85$ cm².

5.2. *ÉLÉMENTS DE HAUTEUR DIFFÉRENTE* $h_1 > h_2$

L'angle θ est obtenu par construction à partir de l'angle supérieur gauche (Fig. 33).

On obtient :

$C_2 = T_1$

$C_3 = T_1 \cot g\ \theta$

$C_4 = T_1 \sqrt{2}$

$C_5 = \dfrac{T_1}{\sin\theta}$

$C_6 = T_1$

$T_2 = T_1 (1 + \cot g\ \theta)$

$T_3 = T_1$

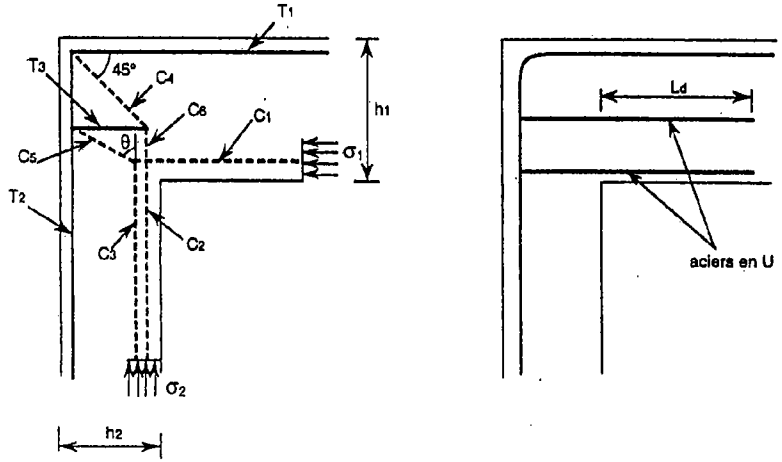


Fig. 33 – Portiques avec éléments de hauteurs différentes sous moment négatif.

6. ÉTUDE D'UN ANGLE DE PORTIQUE AVEC MOMENT POSITIF

6.1. ÉLÉMENTS DE MÊME HAUTEUR h ET PEU SOLLICITÉS (Fig. 34)

$$\sigma_2 = 2\,\sigma_1 \leqslant \frac{0{,}8 f_{c28}}{\gamma b} \qquad \sigma_1 \leqslant \frac{0{,}4 f_{c28}}{\gamma b}$$

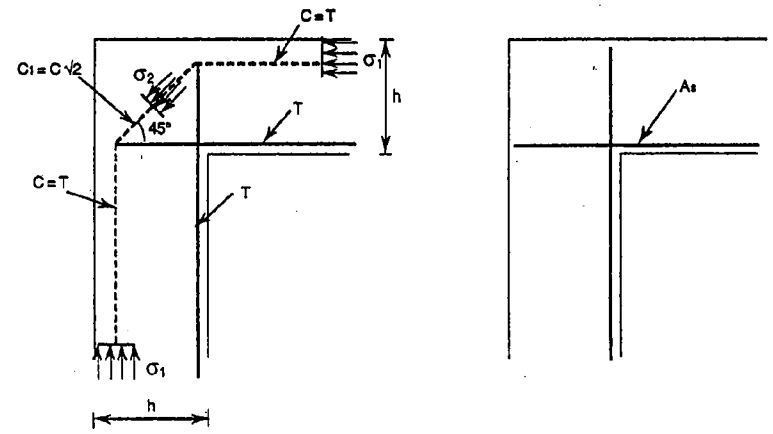


Fig. 34 – Portique sous moment positif faible - Traverse et poteau de même hauteur.

6.2. ÉLÉMENTS DE MÊME HAUTEUR h ET MOYENNEMENT SOLLICITÉS (Fig. 35)

$C = T$; $C_1 = T_1 = C\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

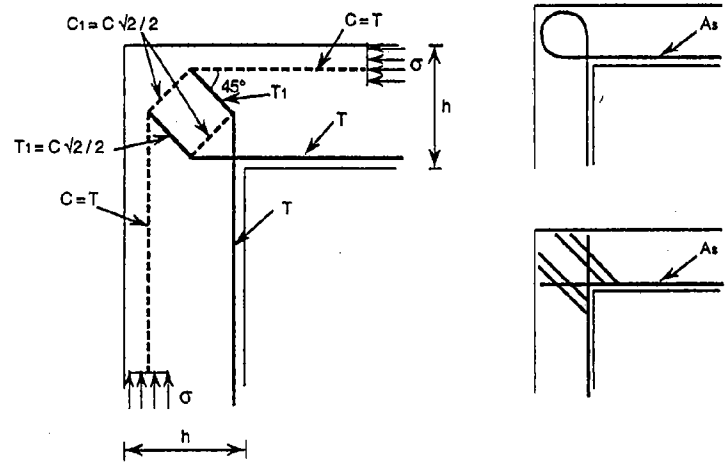


Fig.35 - Portique sous moment positif moyen . Traverse et poteau de même hauteur.

6.3. ÉLÉMENTS DE MÊME HAUTEUR h ET FORTEMENT SOLLICITÉS (Fig. 36)

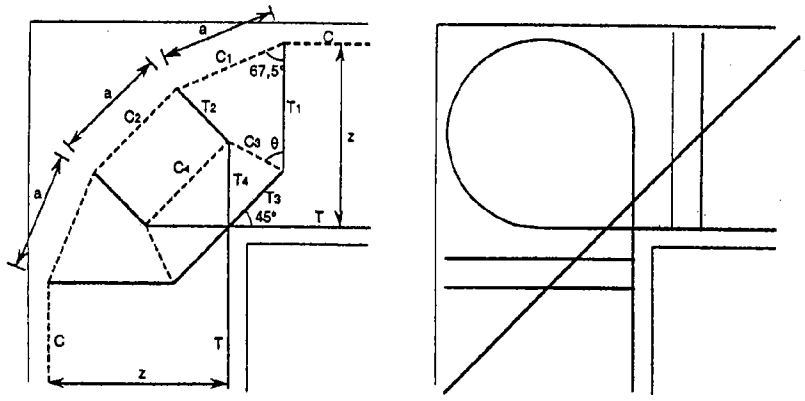


Fig. 36 – Portique sous moment positif important . Traverse et poteau de même hauteur.

Si a représente le côté de la ligne brisée de la bielle comprimée extérieure et z le bras de levier, on doit avoir :

$$0{,}496\ z \leqslant a \leqslant 0{,}917\ z$$

La valeur 0,496 correspond à une position du point B à la verticale du point A, c'est-à-dire que les trois bielles obliques de longueur a sont entièrement dans le nœud et que l'angle θ est nul :

$$0{,}496 = \frac{1}{\cos(\pi/8) + \sin(\pi/8) + \sqrt{2}/2}$$

La valeur 0,917 correspond à une longueur nulle du tirant T_2 : $0{,}917 = \dfrac{1}{\sin(\pi/8) + \sqrt{2}/2}$

$C_1 = \dfrac{T}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$	$T_1 = T \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$
$C_2 = T$	$T_2 = T \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$
$C_3 = \dfrac{T \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$	$T_3 = \dfrac{T \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) \sin(\theta)}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$
$C_4 = T \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \dfrac{\sin(\theta)}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}\right)$	$T_4 = T$

a/z	θ	T_1/T	T_2/T	T_3/T	C_1/C	C_3/C	C_4/C
0,497	0,00	0,4142	0,4142	0,0000	1,0824	0,4142	0,4142
0,500	1,13	0,4142	0,4142	0,0113	1,0824	0,4063	0,4255
0,550	20,91	0,4142	0,4142	0,1619	1,0824	0,3208	0,5762
0,600	43,94	0,4142	0,4142	0,2875	1,0824	0,2929	0,7017
0,650	63,99	0,4142	0,4142	0,3937	1,0824	0,3097	0,8079
0,700	78,22	0,4142	0,4142	0,4847	1,0824	0,3501	0,8989
0,750	87,75	0,4142	0,4142	0,5636	1,0824	0,3988	0,9778
0,800	94,2	0,4142	0,4142	0,6326	1,0824	0,4486	1,0469
0,850	98,8	0,4142	0,4142	0,6936	1,0824	0,4963	1,1078
0,900	102,2	0,4142	0,4142	0,7477	1,0824	0,5410	1,1619
0,917	103,2	0,4142	0,4142	0,7648	1,0824	0,5554	1,1790

6.4. ÉLÉMENTS DE HAUTEURS DIFFÉRENTES $h_2 \leqslant h_1$ (Fig. 37)

On vérifiera :

$\sigma_3 = 2\,\sigma_1 \leqslant 0{,}8\,f_{c28}/\,\gamma_b$ donc $\sigma_1 \leqslant 0{,}4\,f_{c28}/\,\gamma_b$
$\sigma_2 \leqslant 0{,}8\,f_{c28}/\,\gamma_b$

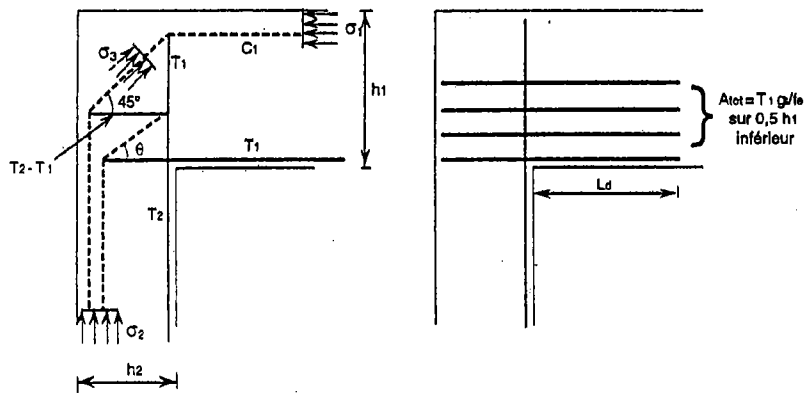


Fig. 37 – Portique avec traverse plus grande que le poteau.

7 - POUTRE ÉCHANCRÉE EN EXTRÉMITÉ

La bielle unique d'appui, inclinée de θ, est reprise par un acier horizontal (effort T_4), lui-même tenu par deux bielles (efforts C_1 et C_2), descendante et montante, situées au-delà de la bielle principale (effort C_3) (Fig. 38).

L'angle θ doit être supérieur à 45°, sinon on prévoira un relevage de la charge et une bielle supplémentaire.

Remarque

L'Eurocode 2 autorise des bielles d'inclinaisons variables, telles que :
$0{,}5 \leqslant \operatorname{tg}\theta \leqslant 2$.

Les angles β et γ doivent être inférieurs ou égaux à 45°. Par exemple, si $z_2 - z_1 < z_2$ on prendra $\beta = 45°$ et $\gamma = 45°$ dans le cas contraire.

On a : $T_4 = F \operatorname{cotg}\theta$, et $C = F/\sin\theta$.

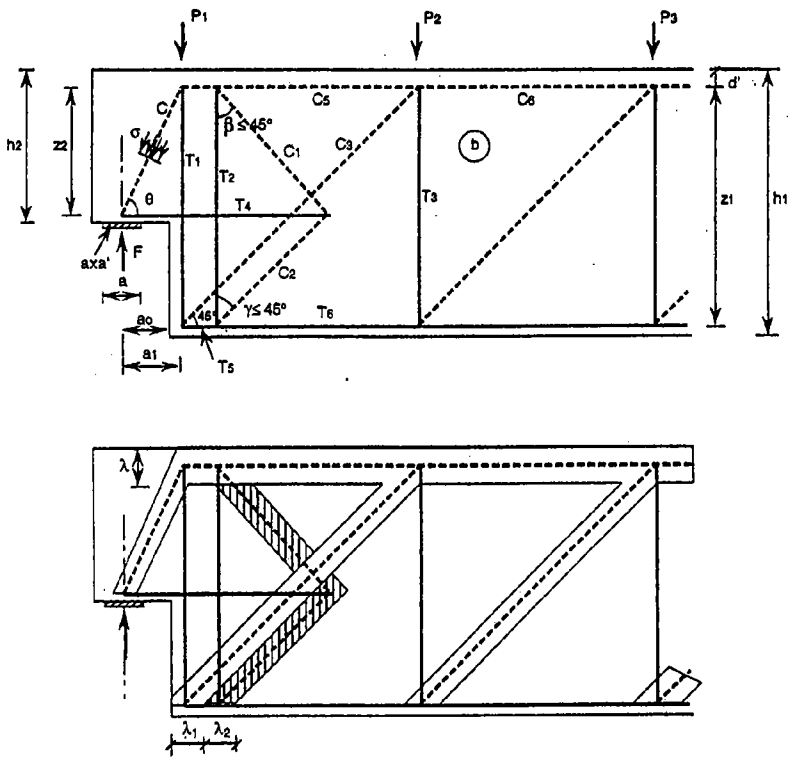


Fig. 38 – Poutre échancrée en extrémité . Ferraillage.

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Sans reprise de bétonnage.

Données (Fig. 39)

h_1	m	0,62
h_2	m	0,42
b	m	0,30
a_o	m	0,20
d'	m	0,04
d	m	0,58
a	m	0,20

a'	m	0,20
F	MN	0,30
P_1	MN	0,04
P_2	MN	0,05
f_{c28}	MPa	25
σ_{bu}	MPa	13,33
f_e	MPa	500

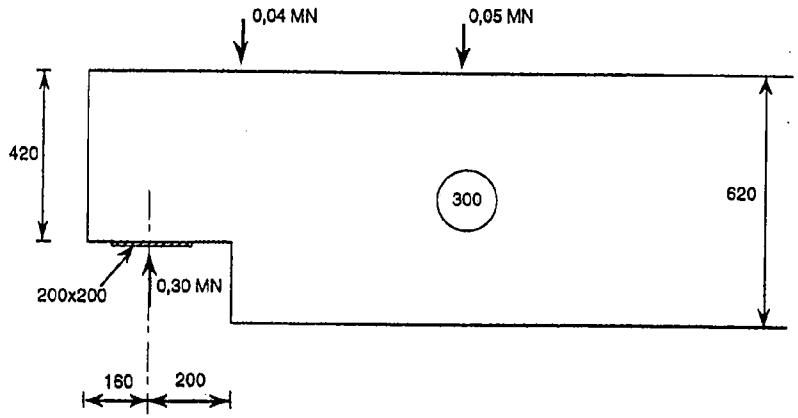


Fig. 39 – Exemple de poutre avec échancrure d'about.

Les valeurs suivantes sont fixées *a priori*, puis corrigées de façon à avoir :
$z_1 = z'_1$; $z_2 = z'_2$; $a_1 = a'_1$, valeurs calculées en fin de tableau.

z1	donnée a priori	m	0,547
z2	donnée a priori	m	0,347
a1	donnée a priori	m	0,305

• **Calculs**

Variable	Formule	Unité	Valeur	
tg β	$(z_1 - z_2)/z_2$		0,5764	
tg γ	$z_2/(z_1 - z_2)$		1,7350	
tg θ	z_2/a_1		1,1377	> 1 donc γ = 45 °
β		rd	0,5229	
γ		rd	0,7854	
θ		rd	0,8497	
β		°	29,96	
γ		°	45	
θ		°	48,69	
C	F/sin θ	MN	0,3994	
T_4	F cotg θ	MN	0,2637	

Variable	Formule	Unité	Valeur	
$T_1 = T_5$	$F - P_1$	MN	0,2600	
C_1	$\frac{T_4 \cos\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$	MN	0,1931	
T_2	$C_1 \cos\beta$	MN	0,1673	
C_2	$\frac{T_4 \cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$	MN	0,2366	
T_3	$T_1 - P_2$	MN	0,2100	
C_3	$T_1\sqrt{2}$	MN	0,3677	
C_4	$C \cos\theta$	MN	0,2637	
C_5	$C_4 - C_1 \sin\beta$	MN	0,1673	
T_6	$T_5 + C_2 \sin\gamma$	MN	0,4273	
C_6	$C_5 + C_3\sqrt{2}/2$	MN	0,4273	
σ_b	$\frac{F}{aa' \sin\theta}$	MPa	13,29	< σ_{bu} = 13,33 OK
λ	$\frac{C_4}{b\sigma_{bu}}$	m	0,066	
z'_1	$h_1 - \lambda/2 - d'$	m	0,547	= z_1 = 0,547 OK
z'_2	$h_2 - \lambda/2 - d'$	m	0,347	= z'_2 = 0,347 OK
λ_1	$\frac{C_3\sqrt{2}}{b\sigma_{bu}}$	m	0,130	
λ_2	$\frac{C_2 \cos\gamma}{b\sigma_{bu}}$	m	0,084	
a'_1	$a_o + \lambda_1/2 + d'$	m	0,305	= a_1 = 0,305 OK
A_{s4}	T_4/σ_s	cm^2	6,06	3 HA16 = 6,03
$\varnothing_4$		mm	16	
L_1	$\lambda_1 + \lambda_2/2 + z_2 - z_1 + L_d$	m	1,14	avec $L_d = 45\,\varnothing_4$
A_{s6}	T_6/σ_s	cm^2	9,83	3 HA16 + 3 HA14 = 10,65
$A_{s1} = A_{s5}$	T_5/σ_s	cm^2	5,98	3 HA16
A_{s2}	T_2/σ_s	cm^2	3,85	3 HA14

Cisaillement dans la partie la moins haute :

$$\tau_u = \frac{F}{b(h_2 - d')} = \frac{0{,}30}{0{,}3 \times 0{,}38} = 2{,}63 \text{ MPa} < \frac{0{,}2\, f_{c28}}{\gamma b} = \frac{0{,}2 \times 25}{1{,}5} = 3{,}33 \text{ MPa} \quad \text{OK}$$

Cadres verticaux : $\dfrac{A_t}{s_t} = \dfrac{1{,}15(T_1 - 0{,}3\, kbdf_{t28})}{0{,}9\, df_e}$

avec :
$k = 1$
$f_{t28} = 0{,}06 f_{c28} + 0{,}6 = 2{,}1$ MPa
$b = 0{,}3$ m
$d = h_1 - d' = 0{,}58$ m

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1{,}15 \times (0{,}26 - 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}58 \times 2{,}1)\ 10^4}{0{,}9 \times 0{,}58 \times 500} = 6{,}63 \text{ cm}^2/\text{m}$$

soit 1 cad + 1 ép. HA6, $s = 128$ mm

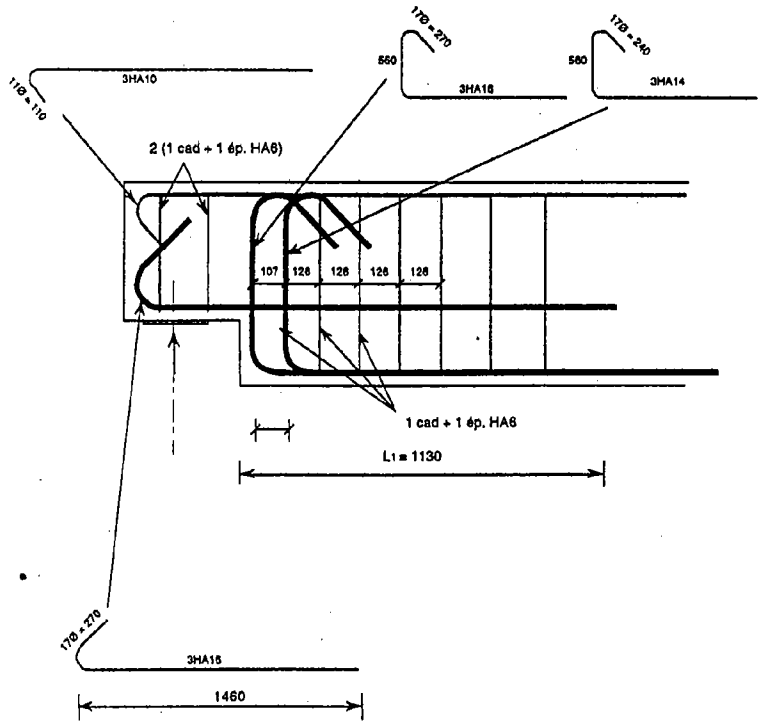


Fig. 40 – Poutre échancrée en extrémité . Ferraillage.

Remarque

Pour des efforts faibles, on peut disposer les deux aciers de relevage sur la même verticale et ne pas les décaler de $\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

8. CHANGEMENT DE SECTION

Le changement de section d'une poutre peut être traité de la même façon qu'une échancrure, étudiée ci-dessus en prenant un angle θ de 45° (Fig. 41).

Les angles β et γ doivent être inférieurs ou égaux à 45°, l'un des deux étant égal à 45°.

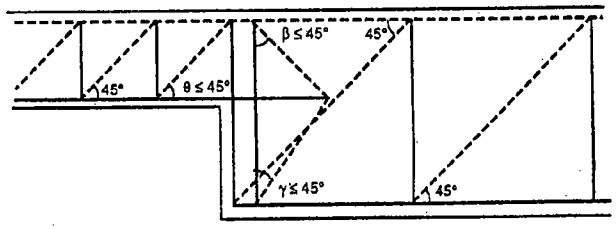


Fig. 41 – Changement de section dans une poutre . Bielles et tirants.

Dans le cas de faible effort tranchant, on peut regrouper les deux aciers de relevage en un seul.

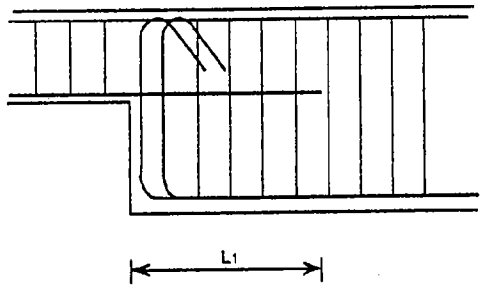


Fig. 42 – Changement de section dans une poutre . Ferraillage.

9. CONSOLES

9.1. SCHÉMA SIMPLIFIÉ $a \simeq z$ (Fig. 43)

On appelle console courte, l'élément en porte-à-faux transmettant l'effort F supporté directement à l'appui par une seule bielle inclinée d'au moins 45° sur l'horizontale.

Dans le cas contraire, nous aurons une console longue avec au moins deux bielles successives.

Remarque

L'Eurocode 2 autorise des inclinaisons de bielles comprises entre 26,57° et 63,43° (tg θ compris entre 0,5 et 2).

Les efforts sont les suivants:

$$C_1 = \frac{F}{\sin\theta} \qquad T_1 = C_1 \cos\theta = F \operatorname{cotg}\theta$$

$$C_2 = \frac{T_1}{\cos\theta'} = F\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\cos\theta'}$$

$$C_3 = C_1 \sin\theta + C_2 \sin\theta' = F\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\theta'}{\operatorname{tg}\theta}\right)$$

$$T_2 = C_2 \sin\theta' = F\frac{\operatorname{tg}\theta'}{\operatorname{tg}\theta}$$

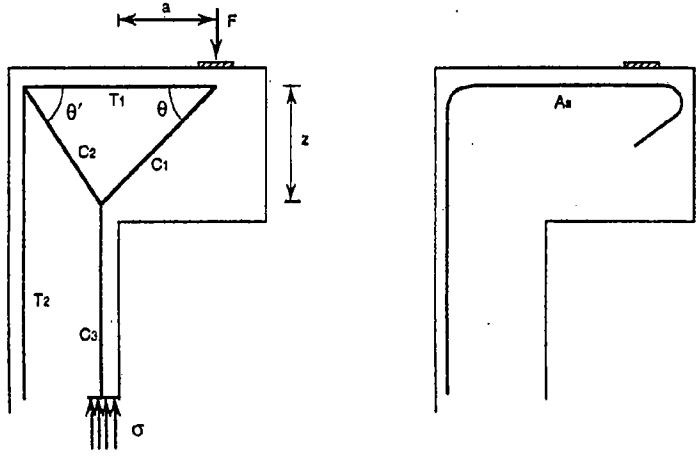


Fig. 43 – Console courte avec a ~ z. Schéma simplifié.

9.2. SCHÉMA AVEC BIELLE ÉPANOUIE $a < z$ (Fig. 44)

Les valeurs des efforts sont :

$$C_1 = \frac{F}{2\sin\theta\cos\theta_1} \qquad C_2 = \frac{F}{2\sin\theta}$$

$$T_1 = \frac{F\operatorname{tg}\theta_1}{2\sin\theta} \qquad T_2 = F\operatorname{cotg}\theta$$

$$C_3 = \frac{T_2}{\cos 45°} \qquad T_3 = T_2 \operatorname{tg} 45°$$

$$C_4 = \frac{T_2}{\cos 45°}\,\frac{\cos(\theta_2 - 45°)}{\sin(\theta_2 + \theta_4)}$$

$$T_5 = C_3 \sin(\theta_2 - 45°) + C_4 \cos(\theta_2 + \theta_4)$$

$$C_5 = T_5\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}$$

$$T_4 = T_3 + T_5\cos\theta_2 + C_5\cos\theta_3$$

$$C_6 = C_4\sin\theta_4 + C_5\sin\theta_3$$

$$C_7 = C_4\cos\theta_4 + C_5\cos\theta_3$$

Les angles sont fonction des largeurs λ_1 et λ_2 des bielles comprimées C_7 et F.
Les valeurs de λ_1 et λ_2 sont déterminées par les égalités :

$$\sigma_{bu} = \frac{0{,}8f_{c28}}{\gamma b} = \frac{C_7}{b\lambda_1}$$

$$\sigma_{bu} = \frac{0{,}8f_{c28}}{\gamma b} = \frac{F}{b\lambda_2}$$

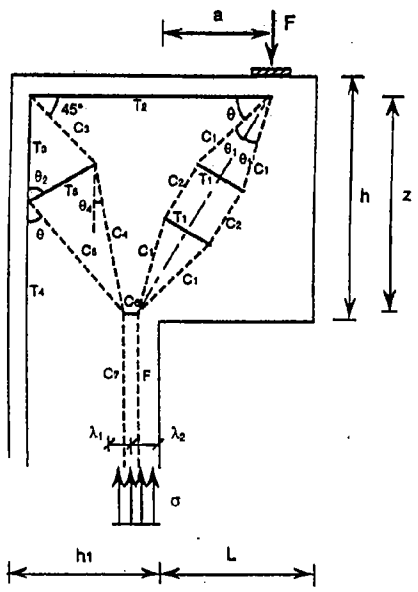


Fig. 44 – Console courte (a < z) avec bielle épanouie avec armatures complémentaires inclinées

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Données : $h = 0{,}45$; $h_1 = 0{,}30$; $L = 0{,}30$; $F = 1$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{0{,}40}{0{,}28} \quad ; \quad \text{soit} \quad \theta = 55°$$

$$\theta_1 = 15°$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{0{,}38}{0{,}20} \quad ; \quad \text{soit} \quad \theta_2 = 62{,}24°$$

$$\operatorname{tg}\theta_3 = \frac{0{,}185}{0{,}195} \quad ; \quad \text{soit} \quad \theta_3 = 43{,}49°$$

$$\operatorname{tg}\theta_4 = \frac{0{,}045}{0{,}265} \quad ; \quad \text{soit} \quad \theta_4 = 9{,}64°$$

On trouve :

$C_1 = 0{,}632$ $\quad$ $\mathbf{T_1 = 0{,}163}$
$C_2 = 0{,}610$ $\quad$ $T_2 = 0{,}700$
$C_3 = 0{,}990$ $\quad$ $T_3 = 0{,}700$
$C_4 = 0{,}995$ $\quad$ $T_4 = 1{,}543$
$C_5 = 0{,}775$ $\quad$ $T_5 = 0{,}603$
$C_6 = 0{,}700$
$C_7 = 1{,}543$

9.3. SCHÉMA AVEC ARMATURES HORIZONTALES COMPLÉMENTAIRES $a < z$ (Fig. 45)

Le nombre de bielles inclinées d'angle θ_3, θ_4, ... et d'aciers horizontaux, à gauche de la console, dépend de la hauteur de la console et de la largeur du poteau.

Les angles θ_3, θ_4, ... sont pris supérieurs ou égaux à 45°.
L'angle θ_2 est déterminé par:

$$\operatorname{cotg}\theta_2 = \frac{(2d_1 + d_2)\operatorname{cotg}\theta - d_1\operatorname{cotg}(\theta + \theta_1) - d_1\operatorname{cotg}(\theta - \theta_1)}{d_2}$$

Si $d_1 = d_2$, on trouve : $\operatorname{cotg}\theta_1 = 3\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{cotg}(\theta + \theta_1) - \operatorname{cotg}(\theta - \theta_1)$

Pour trois bielles (Fig. 24), les efforts valent :

$$C_1 = \frac{F \sin(\theta + \theta_1 - \theta_2)}{\sin\theta_2 \sin 2\theta_1}$$

$$C_1' = \frac{F \sin(\theta_2 + \theta_1 - \theta)}{\sin\theta_2 \sin 2\theta_1}$$

$$C_2 = \frac{C_1' \sin(\theta + \theta_1)}{\sin\theta_2}$$

$$C_3 = \frac{C_1 \sin(\theta - \theta_1)}{\sin\theta_2}$$

$T_1 = C_1 \cos(\theta - \theta_1) - C_3 \cos\theta_2$

$T_2 = F \operatorname{cotg}\theta_2$

$C_4 = T_2 / \sin 45°$
$T_3 = T_2 \operatorname{cotg} 45°$
$T_4 = T_2$

$C_6 = T_2 \operatorname{cotg} 45°$
$C_5 = T_2 / \sin\theta_3$
$T_5 = T_2(\operatorname{cotg} 45° + \operatorname{cotg}\theta_3)$

$T_6 = T_2$
$C_8 = T_2 (\operatorname{cotg} 45° + \operatorname{cotg}\theta_3)$
$C_7 = T_2 / \sin\theta_4$

$T_7 = T_2 (\operatorname{cotg} 45° + \operatorname{cotg}\theta_3 + \operatorname{cotg}\theta_4)$
$C_{10} = T_2 (\operatorname{cotg} 45° + \operatorname{cotg}\theta_3 + \operatorname{cotg}\theta_4) = T_7$
$C_9 = C_7 \sin\theta_4 = T_2$

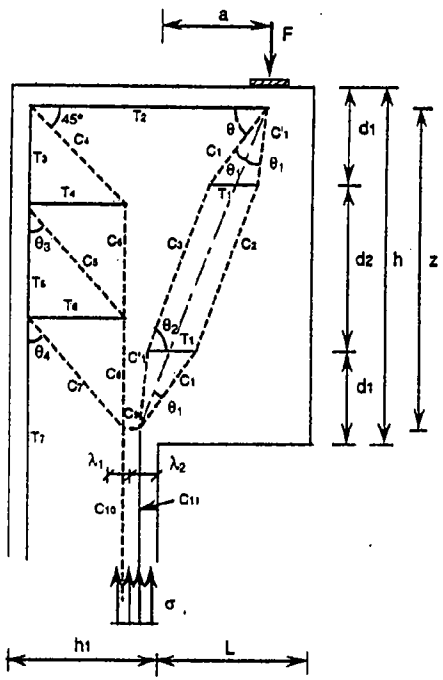


Fig. 45 – Console (a < z) avec armatures complémentaires horizontales.

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Données : $h = 0{,}58$; $h_1 = 0{,}24$; $L = 0{,}43$; $d_1 = d_2/2$; $F = 1$

$\operatorname{tg}\theta = 0{,}51/0{,}40$ soit $\theta = 51{,}89°$

$\theta_1 = 20°$

$\operatorname{tg}\theta_3 = 0{,}19/0{,}18$ soit $\theta_3 = 46{,}54° \geqslant 45°$

$\operatorname{tg}\theta_4 = 0{,}19/0{,}18$ soit $\theta_4 = 46{,}54° \geqslant 45°$

$\operatorname{cotg}\theta_2 = 2\operatorname{cotg}\theta - 0{,}5\operatorname{cotg}(\theta+\theta_1) - 0{,}5\operatorname{cotg}(\theta-\theta_1) = 0{,}602$ soit $\theta_2 = 58{,}97°$

$C_1 = 0{,}406$	$C'_1 = 0{,}826$	$T_1 = \mathbf{0{,}216}$	$T_6 = 0{,}602$
$C_2 = 0{,}917$	$C_3 = 0{,}250$	$T_2 = 0{,}602$	$T_7 = 1{,}741$
$C_4 = 0{,}851$	$C_5 = 0{,}829$	$T_3 = 0{,}602$	
$C_6 = 0{,}602$	$C_7 = 0{,}829$	$T_4 = 0{,}602$	
$C_8 = 1{,}171$	$C_9 = 0{,}602$	$T_5 = 1{,}171$	
$C_{10} = 1{,}741$			

$$A_1 = \frac{0{,}602 \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 13{,}85\ \text{cm}^2 \qquad \text{soit } 5\ \text{HA20}$$

$$\sum A_2 = \frac{2 \times 0{,}216 \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 9{,}94\ \text{cm}^2 \qquad \text{soit } 3 \times 3\ \text{HA12}$$

$$A_3 = \frac{(1{,}741 - 0{,}602) \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 26{,}20\ \text{cm}^2 \qquad \text{soit } 6\ \text{HA25}$$

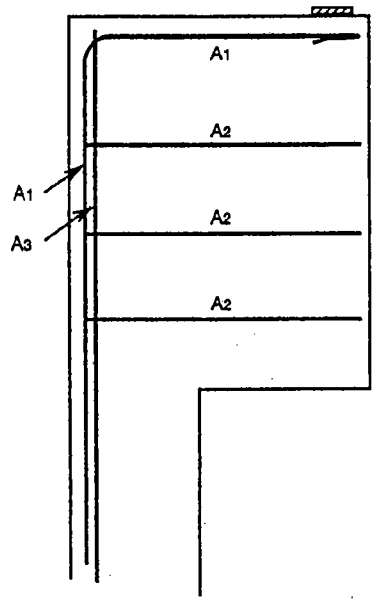


Fig. 46 – Console avec a < z . Ferraillage.

9.4. SCHÉMA AVEC ARMATURES VERTICALES INTERMÉDIAIRES (z < a < 2 z)

L'inclinaison θ_2 est donnée par :

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{(2d_1 + d_2)\operatorname{tg}\theta - d_1\operatorname{tg}(\theta+\theta_1) - d_1\operatorname{tg}(\theta-\theta_1)}{d_2}$$

Si $d_1 = d_2$, on a alors : $\operatorname{tg}\theta_2 = 3\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta+\theta_1) - \operatorname{tg}(\theta-\theta_1)$.

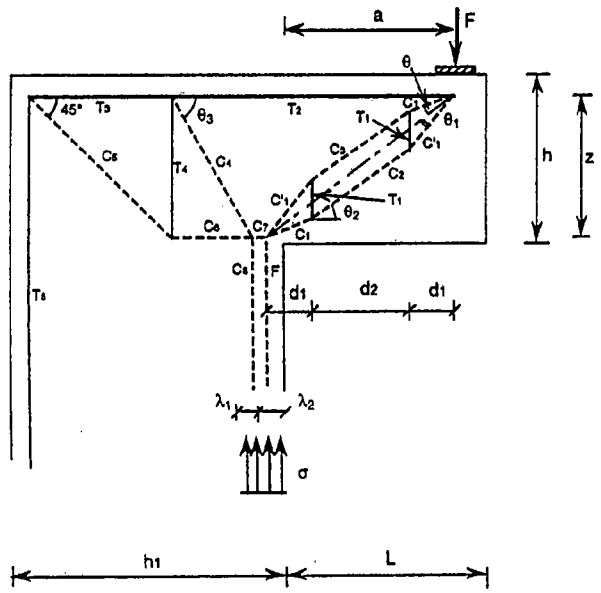


Fig. 47 – Console (z < a < 2 z) avec armatures complémentaires verticales.

Pour deux bielles en partie gauche (Fig. 47), les efforts valent :

$$C_1 = \frac{F \sin(\theta + \theta_1 - \theta_2)}{\sin\theta_2 \sin 2\theta_1}$$

$$C'_1 = \frac{F \sin(\theta_2 + \theta_1 - \theta)}{\sin\theta_2 \sin 2\theta_1}$$

$$C_2 = \frac{C'_1 \cos(\theta + \theta_1)}{\cos\theta_2}$$

$$C_3 = \frac{C_1 \cos(\theta - \theta_1)}{\cos\theta_2}$$

$$T_1 = C_3 \sin\theta_2 - C_1 \sin(\theta - \theta_1)$$

$$T_2 = F \operatorname{cotg}\theta_2$$

Le schéma convient si $C_1 > 0$, c'est-à-dire si $\theta_2 > \theta - \theta_1$, soit :

$$\frac{d_2}{d_1} \geqslant \frac{\operatorname{tg}(\theta + \theta_1) + \operatorname{tg}(\theta - \theta_1) - 2\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta - \theta_1)}$$

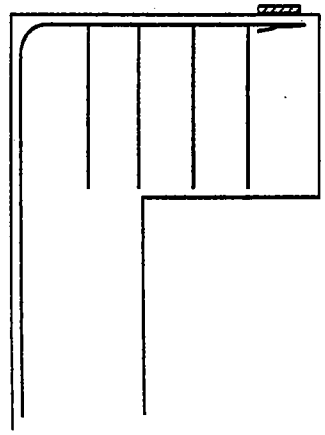


Fig. 48 – Console (z < a < 2 z) avec armatures complémentaires verticales.

Posons $A = \dfrac{\operatorname{tg}\theta_3}{\operatorname{tg}\theta_3 + \operatorname{tg}45°}$.

On a alors : $T_3 = A\,T_2$

$T_4 = A\,T_2 \operatorname{tg}45°$

$T_5 = T_4$

$$C_4 = \frac{AT_2 \operatorname{tg}45°}{\sin\theta_3}$$

$$C_5 = \frac{AT_2}{\cos 45°}$$

$C_6 = A\,T_2$

$C_7 = T_2 = F \operatorname{cotg}\theta_2$

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Données : $h = 0{,}45$, $h_1 = 0{,}76$, $L = 0{,}47$, $d_1 = 0{,}4\,d_2$, $F = 1$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{0{,}415}{0{,}46}$ soit $\theta = 42°{,}05$

$\theta_1 = 18°$, $\text{tg}\,\theta_3 = \dfrac{0{,}41}{0{,}25}$ soit $\theta_3 = 58°{,}63$

On trouve : $\text{tg}\,\theta_2 = 1{,}8\,\text{tg}\,\theta - 0{,}4\,\text{tg}(\theta + \theta_1) - 0{,}4\,\text{tg}(\theta - \theta_1)$, soit : $\theta_2 = 36°{,}90$
A = 0,621

$C_1 = 1{,}113$ $C'_1 = 0{,}630$ $\mathbf{T_1 = 0{,}310}$
$C_2 = 0{,}393$ $T_2 = 1{,}332$
$C_3 = 1{,}271$ $T_3 = 0{,}827$
$C_4 = 0{,}969$ $T_4 = 0{,}827$
$C_5 = 1{,}170$ $T_5 = 0{,}827$
$C_6 = 0{,}827$
$C_7 = 1{,}332$

Dans les trois exemples étudiés ci-dessus, on a un rapport des efforts dans les aciers complémentaires sur l'effort de tirant égaux à :

$$\frac{2T_1}{T_2} = \frac{2 \times 0{,}163}{0{,}7} = 0{,}466$$

$$\frac{2T_1}{T_2} = \frac{2 \times 0{,}216}{0{,}602} = 0{,}718$$

$$\frac{2T_1}{T_2} = \frac{2 \times 0{,}31}{1{,}332} = 0{,}466$$

Ces exemples montrent la nécessité de disposer d'aciers complémentaires relativement importants par rapport aux aciers du tirant principal.

10. OUVERTURES DANS LES DALLES

Dans une portion de dalle où l'on peut supposer le moment constant, une ouverture de moyenne ou grande dimension perturbe le cheminement des efforts de compression en fibre supérieure (moments positifs) et de traction en fibre inférieure. Les bielles ou tirants longitudinaux interrompus par l'ouverture doivent être repris par des bielles et tirants inclinés tels que dessinés sur la figure 49 [11].

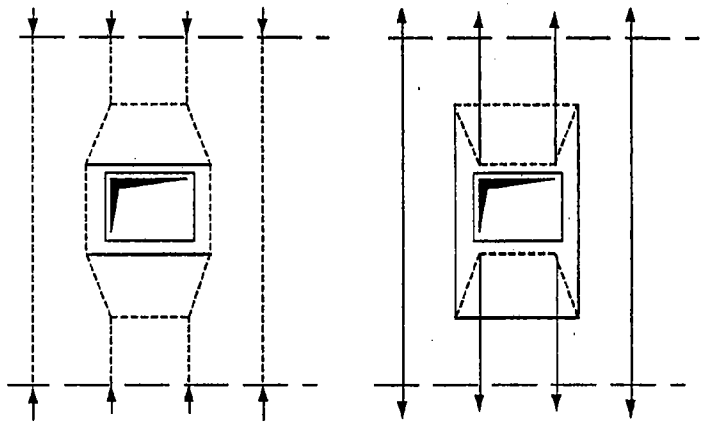


Fig. 49 – Ouverture dans une dalle sous moment constant.

11. GRANDE OUVERTURE DANS UNE POUTRE-CLOISON

Exemple de grande ouverture dans une poutre-cloison (Fig. 50) de 30 cm d'épaisseur et 6,7 m de portée entre axes, supportant une charge concentrée de 2,25 MN.

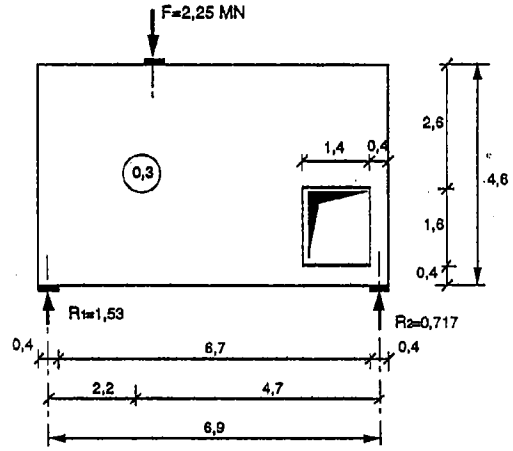


Fig. 50 – Ouverture dans une poutre-cloison.

S'il n'y avait pas d'ouverture (Fig. 51), on aurait deux bielles uniques partant de la charge et allant vers les appuis. Décomposons la charge F en deux charges 0,5 F situées aux abscisses 2,10 m et 2,30 m. Le système des trois bielles doit être funiculaire des deux charges, donc, avoir la même allure que la courbe des moments à un coefficient près.

Moments :

$$M_A = \frac{0{,}5\,Fa\,(L-a)}{L} + \frac{0{,}5\,Fa\,(L-a')}{L} = 1{,}643 + 1{,}575 = 3{,}218\ \text{MNm}$$

$$M_{A'} = \frac{0{,}5\,Fa\,(L-a')}{L} + \frac{0{,}5\,Fa'(L-a')}{L} = 1{,}575 + 1{,}725 = 3{,}300\ \text{MNm}$$

Réactions d'appuis :

$$R_1 = \frac{0{,}5\,F\,(L-a)}{L} + \frac{0{,}5\,F\,(L-a')}{L} = 0{,}783 + 0{,}750 = 1{,}533\ \text{MN}$$

$$R_2 = \frac{0{,}5\,Fa}{L} + \frac{0{,}5\,Fa'}{L} = 0{,}717\ \text{MN}$$

On disposera le nœud le plus haut à 10 cm de la fibre supérieure de la poutre afin que la bielle supérieure ait une contrainte de compression inférieure à la valeur limite de $\frac{0{,}8 f_{c28}}{1{,}5} = 13{,}33$ MPa.

Bras de levier : $z_{A'} = 4{,}30$ m

$z_A = \frac{M_A}{M_{A'}}\ z_A = \frac{3{,}218}{3{,}300} \times 4{,}3 = 4{,}193$ m (au prorata des moments, comme vu ci-dessus).

On admettra que les deux bielles inclinées s'épanouissent avec un angle de 15° d'ouverture (voir chapitre 10, § 9.2.1).

Effort de traction du tirant inférieur : $T = \frac{M_A}{z_A} = \frac{M_{A'}}{z_{A'}} = 0{,}767$ MN.

Effort de compression de la bielle supérieure : C = T = 0,767 MN et contrainte de compression : $\sigma_c = \frac{0{,}767}{0{,}3 \times 0{,}2} = 12{,}78 < 13{,}33$ OK.

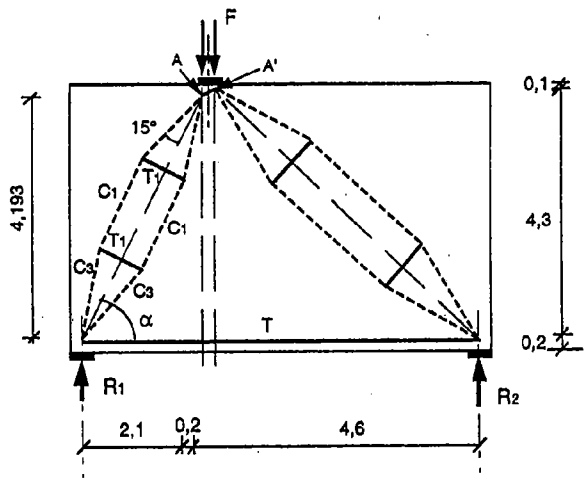


Fig. 51 – Étude de la poutre sans ouverture.

Pour le côté gauche (sans ouverture), la bielle moyenne est inclinée de α tel que :

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4{,}193}{2{,}1} = 1{,}9967, \quad \text{soit } \alpha = 63°,40.$$

De l'équilibre des nœuds, on tire :

$T = R_1 \cot g\,\alpha = 0{,}767$ MN (ce que l'on vérifie bien).

$$C_1 = \frac{0{,}5\,R_1}{\sin\alpha} = 0{,}857\ \text{MN}$$

$$C_3 = \frac{C_1}{\cos 15°} = 0{,}887\ \text{MN}$$

$T_1 = C_3 \sin 15° = 0{,}230$ MN

dont la composante verticale vaut :

$T_1 \cos\alpha = 0{,}103$ MN sur $\frac{3}{4} \times 2{,}10$ m, soit 0,065 3 MN/m et la composante horizontale :

$T_1 \sin\alpha = 0{,}206$ MN sur $\frac{3}{4} \times 4{,}193$ m, soit 0,065 5 MN/m. Ces efforts de traction

seront repris par un quadrillage d'acier de : $\frac{0{,}065\,5 \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 1{,}51$ cm²/m.

Pour le côté droit (avec ouverture), un premier modèle de fonctionnement en bielles et tirants [11] consiste à disposer d'un acier de relevage à 45° passant à 10 cm de l'ouverture (Fig. 52). Nous supposerons que le premier modèle reprend la moitié de la charge 0,5 F, le deuxième modèle envisagé ci-après reprenant l'autre moitié.

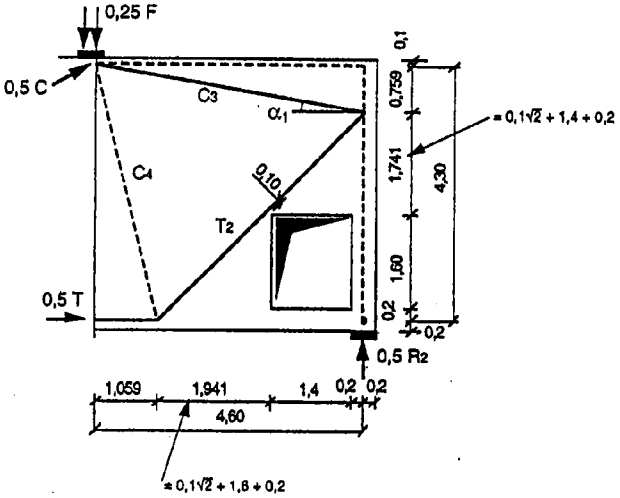


Fig. 52 – Modèle 1 pour le côté avec ouverture.

L'équilibre du nœud supérieur droit permet d'écrire les deux équations à deux inconnues :

$$C_3 \cos \alpha_1 = T_2 \cos 45°$$
$$C_3 \sin \alpha_1 + T_2 \sin 45° = 0{,}5\ R_2$$

d'où $C_3 = \frac{0{,}5\ R_2}{\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1} = 0{,}312$ MN et $T_2 = 0{,}435$ MN.

On superpose un deuxième modèle au modèle précédent (Fig. 53).

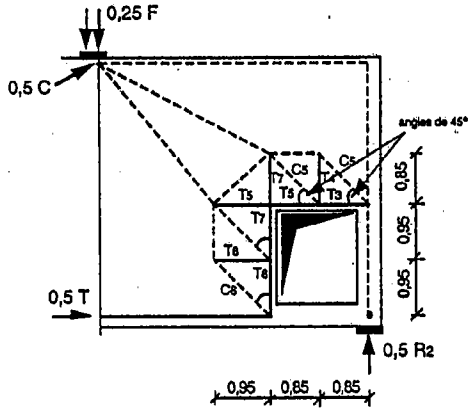


Fig. 53 – Deuxième modèle de bielles et tirants.

• **Efforts et aciers** (Fig. 54)

$C_5 = 0{,}5\ R_2\ \sqrt{2}$ $\quad$ $C_6 = 0{,}5\ T\ \sqrt{2}$
$T_3 = 0{,}5\ R_2$ $\quad$ $T_6 = 0{,}5\ T$
$T_4 = 0{,}5\ R_2$ $\quad$ $T_7 = T$
$T_5 = 2\ T_3 = R_2$ $\quad$ $T_8 = 0{,}5\ T$

Tirant	Effort (MN)	Acier (cm²)	soit
T	0,767	17,64	4 HA20 + 2 HA20
T_1	0,230	5,29	2 × 4 HA8/m
T_2	0,435	10,01	4 HA20
T_3	0,359	8,26	voir T5
T_4	0,359	8,26	6 HA14
T_5	0,717	16,49	6 HA20
T_6	0,384	8,83	voir T7
T_7	0,767	17,62	6 HA20
T_8	0,384	8,83	6 HA14

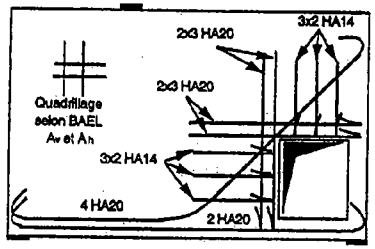


Fig. 54 – Ferraillage.

12. POUTRE BAÏONNETTE

On a vu le cas de changement de section en 8 ci-dessus. La poutre baïonnette (Fig. 55a), avec ou sans changement de section, nous conduit à un raisonnement analogue.

Intuitivement, on disposerait d'un acier continu avec boucle (Fig. 55b) et pour des efforts pas trop importants à un système de bielles et tirants comme indiqué sur la figure 55c.

Pour des efforts importants, on évite le changement brusque de direction de la bielle comprimée, et on tient compte du grand rayon de courbure de l'acier inférieur (Fig. 55d). Il en résulte alors le ferraillage de la figure 55e.

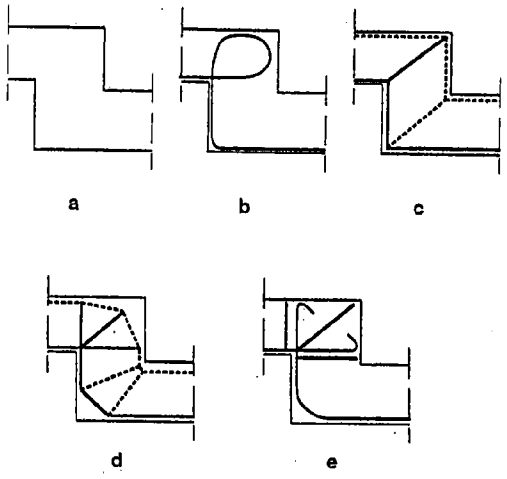


Fig. 55 – Poutre baïonnette.

13. EXEMPLE - ÉTUDE D'UNE FAÇADE SANS POTEAU PAR LA MÉTHODE DES BIELLES

La façade de la figure 56 est caractérisée par le fait que l'on ne peut disposer de continuité verticale pour descendre les charges à l'exception des deux bords extrêmes.

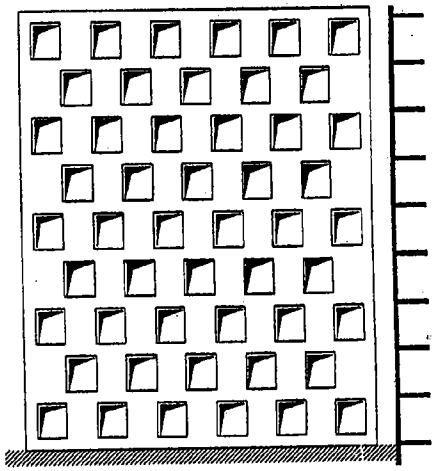


Fig. 56 – Façade sans poteau.

La solution consiste à considérer des systèmes de bielles verticales, puis inclinées, contournant les ouvertures.

Le schéma de transmission des efforts par des bielles est représenté sur la figure 57.

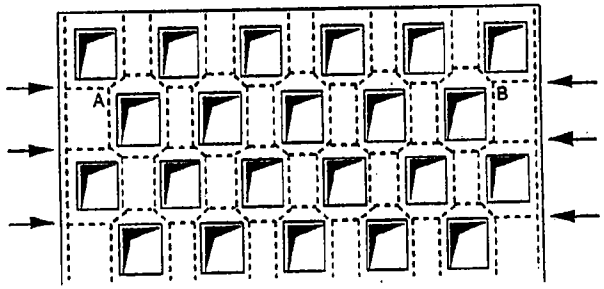


Fig. 57 – Schéma de bielles.

Ce système de bielles ne nécessite pas d'acier d'équilibre, celui-ci étant assuré par des bielles horizontales. Cependant, il faut que les deux bielles d'extrémité en A et B soient équilibrées. Elles ne peuvent l'être que si les poteaux d'extrémité sont bloqués contre tout déplacement horizontal, ce qui n'est pas le cas sauf dispositif spécial, ou bien par un acier reliant les pieds de bielles de A à B. Ceci revient au même que le système de bielles de la figure 58.

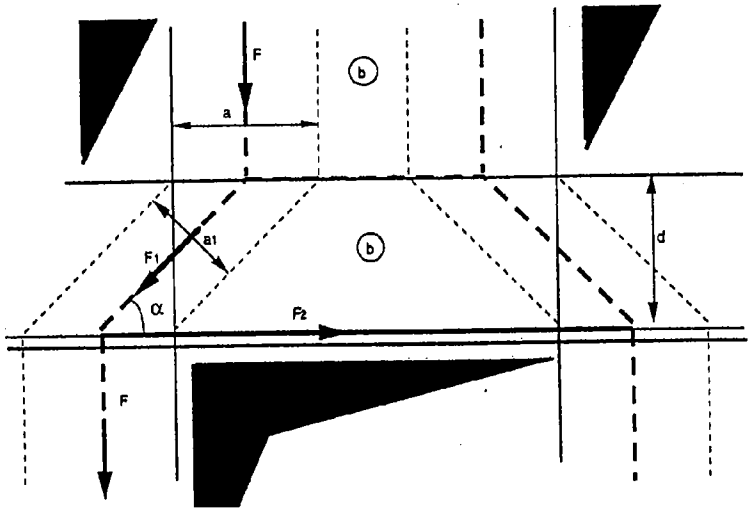


Fig. 58 – Équilibre des bielles.

En fonction de F, α et d et de l'épaisseur b de la façade et des linteaux, on a :

$a = d \cot g\ \alpha$ $\qquad F_1 = \dfrac{F}{\sin \alpha}$ $\qquad \sigma_b = \dfrac{F}{ab} = \dfrac{F \operatorname{tg} \alpha}{bd}$

$a_1 = a \sin \alpha = d \cos \alpha$ $\qquad F_2 = F_1 \cos \alpha = F \cot g\ \alpha$ $\qquad \sigma_{b1} = \dfrac{F_1}{a_1 b} = \dfrac{F}{bd} \dfrac{1}{\sin \alpha \,.\, \cos \alpha}$

$$A_s = \frac{F_2}{\sigma_{su}} = \frac{F \cot g\ \alpha}{\sigma_{su}}$$

• APPLICATION NUMÉRIQUE

H = hauteur d'étage = 2,80 m
h = hauteur du linteau = 0,90 m
d = hauteur utile du linteau = h – 0,05 = 0,85 m
g = 24,062 kN/m et q = 10 kN/m

Charge ultime pour 9 niveaux et par mètre de façade :
$p_u = 9\ (1{,}35\ g + 1{,}5\ q) = 427{,}36$ kN/m

$F = 1{,}80\ \text{m} \times p_u = 769{,}2$ kN

Les contraintes du béton dans les bielles ne devront dépasser la valeur :

$$\sigma_{bu} = \frac{0{,}60 f_{c28}}{\gamma b} = \frac{0{,}60 \times 25}{1{,}5} = 10\ \text{MPa}$$ car la fissuration peut se développer en biais par cisaillement vertical du linteau et celle de l'acier $\sigma_{su} = \dfrac{f_e}{\gamma s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 434{,}8$ MPa.

Pour un ensemble d'une ouverture et d'un panneau plein et des linteaux associés de 3,60 m, on calcule le volume de béton en fonction de l'épaisseur de la façade b :
$V = (1{,}80\ \text{m} \times (2{,}8\ \text{m} - 0{,}9\ \text{m}) + 3{,}6\ \text{m} \times 0{,}9\ \text{m})\ b = 6{,}66\ b\ \text{m}^2$
et le poids d'acier $P_a = A_s \times 10^{-4} \times 7\,850\ \text{kg/m}^3 \times 3{,}60\ \text{m} = 2{,}826\ A_s$ (A_s en cm^2), d'où le prix béton + acier : $P = 6{,}66\ b \times 500\ \text{F/m}^3 + 2{,}826\ A_s \times 15\ \text{F/kg} = 3330\ b + 42{,}39\ A_s$.

Nous rechercherons le prix minimal pour différentes valeurs de l'inclinaison des bielles, de tangentes comprises entre 0,5 et 2 (comme nous l'autorise l'EC2).

tg α	0,5	0,66667	0,8	1	1,25	1,5	2	1,6	1,57
α	26,57	33,69	38,66	45,00	51,34	56,31	63,43	57,99	57,51
sin α	0,4472	0,5547	0,6247	0,7071	0,7809	0,8321	0,8944	0,8480	0,8434
cos α	0,8944	0,8321	0,7809	0,7071	0,6247	0,5547	0,4472	0,5300	0,5372
cotg α	2,0000	1,5000	1,2500	1,0000	0,8000	0,6667	0,5000	0,6250	0,6369
$K_1 = \dfrac{\sigma_b bd}{F} = \text{tg}\ \alpha$	0,500	0,667	0,800	1,000	1,250	1,500	2,000	1,600	1,570
$K_2 = \dfrac{\sigma_{b1} bd}{F} = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$	2,500	2,167	2,050	2,000	2,050	2,167	2,500	2,225	0,207
$K_3 = \dfrac{A_s \sigma_s}{F}$	2,000	1,500	1,250	1,000	0,800	0,667	0,500	0,625	0,637
$b_1 = \dfrac{K_1 F}{\sigma_{bu} d}$	0,045	0,060	0,072	0,090	0,113	0,136	0,181	0,145	0,142
$b_2 = \dfrac{K_2 F}{\sigma_{bu} d}$	0,226	0,196	0,186	0,181	0,186	0,196	0,226	0,201	0,200
b = Max [b_1 ; b_2]	0,226	0,196	0,186	0,181	0,186	0,196	0,226	0,201	0,200
$A_s = \dfrac{K_3 F}{\sigma_{su}}$	15,82	14,72	13,82	12,51	11,05	9,81	7,91	9,38	9,50
Prix = 3330b + 42,39 A_s	1447,96	1299,96	1224,16	1151,82	1102,89	1083,70	1100,68	1082,09	1082,26

L'avant-dernière colonne correspond au prix minimal (obtenu par approximations successives). On retiendra pour b la valeur arrondie la plus proche, soit 0,20 m (pour une épaisseur minimale de 0,181 m et une épaisseur optimalement économique de 0,201 m).
La dernière colonne correspond à une épaissseur de 0,20 m.
L'inclinaison des bielles est de 57,5°.

La section d'acier retenue est de 9,50 cm², soit 3HA20 = 9,42 cm².

Ainsi, un étage sur deux, l'acier est positionné en haut de linteau et un étage sur deux, en bas de linteau (Fig. 59).

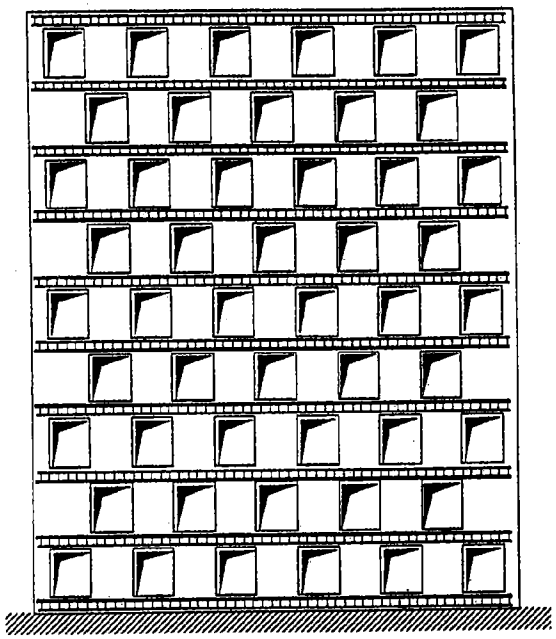


Fig. 59 – Ferraillage des linteaux.

• **Acier minimal de linteau**

Chaque linteau reprend les charges de plancher sur une portée de 1,80 m :

$$p = 1{,}35 \times 12{,}5 + 1{,}5 \times 10 = 31{,}875 \text{ kN/m}$$

Le linteau est encastré ; nous considérons une redistribution des moments en répartissant le

moment isostatique $\frac{pL^2}{8}$, moitié en aciers inférieurs, moitié en aciers supérieurs :

$$M = p\frac{L^2}{16} = 31{,}875 \times \frac{1{,}8^2}{16} = 6{,}46 \text{ kNm}$$ et une section d'acier :

$$A_s = \frac{M}{z\sigma_{su}} = \frac{0{,}006\,46 \times 10^4}{0{,}8 \times 434{,}8} = 0{,}19 \text{ cm}^2$$ avec un bras de levier estimé à 0,80 m.

Le pourcentage minimal vaut :

$$0{,}23\frac{f_{t\,28}}{f_e} b_0 d = \frac{0{,}23 \times 2{,}1}{500} \times 0{,}20 \times 0{,}85 \times 10^4 = 1{,}55 \text{ cm}^2 > 0{,}19$$

soit 3HA10 (2,35 cm²).

Le linteau du niveau supérieur sera ferraillé avec 3HA10 en aciers supérieurs et en aciers inférieurs.

Les aciers de tirants calculés (9,50 cm²) sont nécessaires au niveau le plus bas. Naturellement, on diminuera la section pour les étages au-dessus sans descendre au-dessous de 2 fois 3HA10.

Linteau	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Acier de tirant	9,50	8,44	7,39	6,33	5,28	4,22	3,17	2,11	1,06
Acier de poutre-linteau	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19
Acier total	9,69	8,63	7,58	6,52	5,47	4,41	3,36	2,30	1,25
soit	3HA20 (1)	3HA20	2HA20 + 1HA16	2HA20 + 1HA14	3HA16	3HA14	3HA12	3HA10	3HA10 (2)

(1) Il manque 9,69 – 3 × 3,14 = 0,27 cm² ; les 3HA20 = 9,42 cm² peuvent être considérés comme suffisants pour reprendre l'effort de bielle (on a besoin de 9,50 cm², OK à 0,8 % près) ; il suffit de considérer que les aciers de poutre de 0,19 cm² sont dans les aciers de montage 3HA10.

(2) Minimum 3HA10.

Pour les aciers transversaux de linteaux, l'effort tranchant maximal vaut :

$$V_u = p\frac{L}{2} = 31{,}875 \times 0{,}9 = 28{,}69 \text{ kN}$$ avec $L = 1{,}80$ m

et le cisaillement $\tau_u = \dfrac{V_u}{b_u d} = 0{,}17 \text{ MPa} < \tau_{ulim} = \dfrac{0{,}2 f_{c28}}{1{,}5} = 3{,}33 \text{ MPa}$

d'où une section d'acier : $\dfrac{A_{sl}}{s_t} = \dfrac{\gamma_s b_u \tau_u}{0{,}9 f_e} = \dfrac{1{,}15 \times 0{,}2 \times 0{,}17 \times 10^4}{0{,}9 \times 500} = 0{,}87 \text{ cm}^2/\text{m}.$

Le pourcentage minimal d'acier transversal est donné par :

$$\frac{0{,}4\ b_u}{f_e} = \frac{0{,}4 \times 0{,}2 \times 10^4}{500} = 1{,}6 \text{ cm}^2/\text{m}$$

soit : 1 cad. HA6 + 1ép. HA6 , $s = 0{,}52$ m à limiter à 0,40 m (BAEL 91, art. A.5.1.22).
Ce qui correspond à 2,12 cm²/m > 1,6.

On a ainsi deux types de ferraillage possibles (Fig. 60), suivant le niveau.

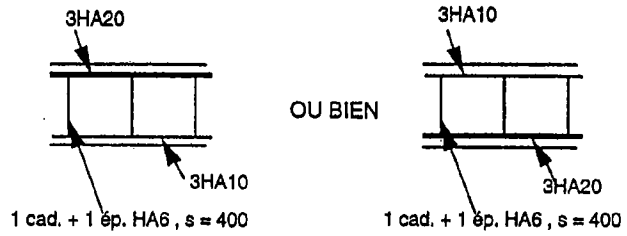


Fig. 60 – Types de ferraillage des linteaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Code-Modèle CEB/FIP 1990 – Bulletin d'information CEB n° 213-214, mai 1993 (articles traitant des bielles et tirants : 6.3.3, 6.3.4, 6.4.2.3, 6.8.2.1, 6.8.2.2).

[2] J. SCHLAICH – Contribution to the Revision of the CEB-MC 1990, Université de Stuttgart, juin 1986.

[3] J. COURBON – Résistance des matériaux, Dunod, 1965.

[4] H. THONIER – Le Projet de béton armé, SEBTP, 1991.

[5] P. LEBELLE – Compte rendu d'expériences, Centre d'Etudes Supérieures de l'ITBTP décembre 1934.

[6] P. LEBELLE – Semelles de béton armé, *Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes*, Zurich, 1934, vol. 4

[7] J. BLEVOT et R. FREMY – Semelles sur pieux. Méthodes de calcul, compte rendu d'essais, dispositions constructives, *Annales de l'ITBTP*, février 1967.

[8] W. RITTER – La méthode de construction de Hennebique *(Die Bauweise Hennebique)*, *Schweizerische Bauzeitung*, Zurich, 1899, vol. 17.

[9] E. MÖRSCH – Construction en béton armé. Théorie et applications *(Der Eisenbetonbau-Seine Theorie und Anwendung)*, Stuttgart, 1920-1922.

[10] P. MARTI – Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design, *ACI Journal Proceedings*, V. 82, N°1, Jan.-Feb.1985.

[11] J. SCHLAICH, K. SCHAFER, M. JENNEWEIN – Toward a consistent design of structural concrete, *PCI Journal*, May/June 1987.

[12] J. SCHLAICH, K. SCHAFER – Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models, *The Structural Engineer*, vol.69, N° 6, March 1991.

[13] Bulletin d'information CEB n° 146 – Shear, Torsion and Punching. Contribution à la 22e Session plénière du CEB (1981), Munich, avril 1982.

13. CONSOLES - ESCALIERS

1. GÉNÉRALITÉS

On rencontre dans les bâtiments des poutres de formes particulières :
- consoles que l'on peut subdiviser en consoles courtes (aussi appelés corbeaux), en consoles de grande portée (auvents de stade par exemple) et consoles courantes (balcons par exemple) ;
- escaliers droits qui sont la plupart assimilables à des poutres inclinées ;
- rampes droites ;
- escaliers et rampes courbes.

2. CONSOLES COURANTES

Les consoles courantes, autres que les consoles courtes (voir en 3 ci-après), sont principalement représentées par les balcons et les auvents de faible portée.
Elles peuvent être d'épaisseur constante (coffrage plus facile à réaliser) ou d'épaisseur variable (économie de béton).

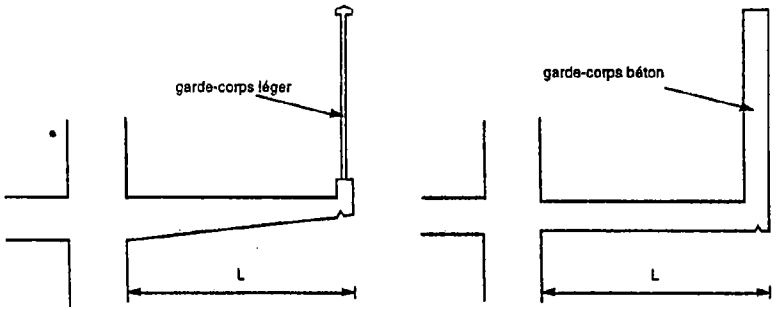


Fig. 1 – Consoles courantes. Balcons.

Le calcul des efforts tranchants et moments est effectué suivant la Résistance des Matériaux (chapitre 2, cas 24 et suivants) en prenant comme portée la longueur libre et avec les charges indiquées dans la norme NF P 06-001 (1] (voir ci-dessus, chapitre 3, §. 2) et rappelées ci-après :
- charge uniforme de 3,5 kN/m² pour habitations et bureaux ou bien charge des locaux attenants si la valeur est supérieure, valeur accrue jusqu'à 6 kN/m² lorsqu'une accumulation de personnes est possible (cas des bâtiments recevant du public et précisés dans les documents du marché) ;
- charge concentrée linéaire horizontale à 1,0 mètre de hauteur (en tête du garde-corps)
  - pour les locaux privés : 0,4 kN/m pour une largeur de stationnement de personnes B perpendiculaire à la portée inférieure à 3,25 m et 1,3/B pour une largeur B supérieure à 3,25 m,
  - pour les coursives et cages d'escaliers des habitations collectives : 0,6 kN/m
  - pour les bâtiments recevant du public : 1,0 kN/m,
  - pour les tribunes de stade : 1,7 kN/m (sauf au droit des escaliers desservant les gradins ou tribunes et aux extrémités des gradins débouchant sur le vide : 1,0 kN/m),
- pour les montants de garde-corps, du fait des scellements courants, le moment résistant ne peut être supérieur à 0,65 kNm par montant.

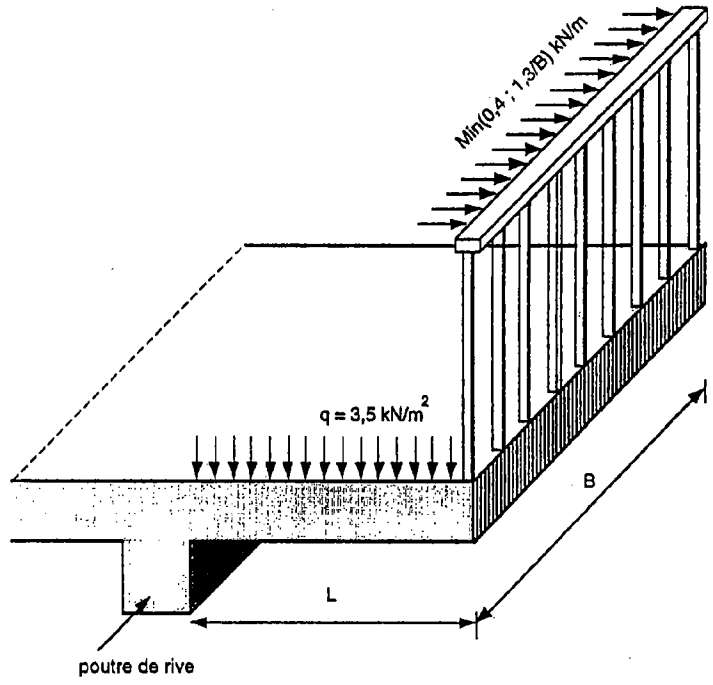


Fig. 2 – Locaux privés. Charges sur balcons.

La charge répartie est supérieure aux charges habituelles des planchers (1,5 kN/m² pour les habitations et 2,5 kN/m² pour les bureaux). Ceci pour tenir compte d'un regroupement possible de personnes en extrémités de balcon à la suite d'un certain nombre d'effondrements dus, en particulier, à un mauvais positionnement en altitude des aciers supérieurs.

La hauteur minimale des garde-corps et les espacements entre barreaux doivent être inférieurs aux valeurs indiquées dans la norme NF P 01-012 [2], ceci pour des raisons de sécurité :
- distance libre maximale entre deux barreaux verticaux : 0,11 m ;
- distance libre maximuale entre deux lisses horizontales ou inclinées : 0,18 m ;
- la hauteur normale de protection et l'épaisseur du garde-corps doivent respectées les valeurs minimum du tableau suivant.

	Garde-corps minces	Garde-corps épais							
Épaisseur E	≤ 0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	≥ 0,60
Hauteur H	1,00	0,975	0,95	0,925	0,90	0,85	0,80	0,75*	0,70*

(*) Pour les habitations, cette valeur ne peut être inférieure à 0,80 m

2.1. EXEMPLE 1. BALCON COURANT

• Données

Balcon de de 5 m de longueur, 2,10 m de portée, constitué d'une dalle d'épaisseur 14 cm avec étanchéité (0,12 kN/m²) et protection lourde par dallettes en béton de 4 cm d'épaisseur (22 kN/m³) sur lit de sable de 2 cm (17 kN/m³). (Pour les charges, voir chapitre 3).
Matériaux : béton de $f_{c28} = 25$ MPa et acier de $f_e = 500$ MPa

$$\text{d'où} \quad \sigma_{bu} = \frac{0{,}85 f_{c28}}{1{,}5} = 14{,}17 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \sigma_{su} = \frac{f_e}{1{,}15} = \frac{500}{1{,}5} = 435 \text{ MPa}$$

Fissuration peu préjudiciable du fait de l'étanchéité.

• Calculs

Hauteur utile : $d = h$ – enrobage – demi-diamètre = 0,14 – 0,015 – 0,010/2 = 0,12 m

Charges permanentes :	épaisseur m	poids volumique kN/m³	poids kN/m²
dalle béton	0,14	24,5	3,43
étanchéité	-	-	0,12
dallots béton	0,04	21,6	0,86
sable	0,02	17,6	0,36
		g =	4,77

Charges variables verticales : $q_1 = 3{,}5$ kN/m²
Charges variables horizontales : q_2 = Min [0,4 ; 1,3/B]
q_2 = Min [0,4 ; 1,3 / 5] = 0,26 kN/m

$$\text{Moment ELU} = M_u = (1{,}35\, g + 1{,}5\, q_1)\frac{L^2}{2} + 1{,}5\, q_2 \times 1 \text{ m} = 26{,}17 \text{ kNm/m}$$

$$\text{Moment réduit :} \quad \mu = \frac{M_u}{d^2 \sigma_{bu}} = \frac{0{,}02617}{0{,}12^2 \times 14{,}17} = 0{,}128 < 0{,}37$$

$$\text{Bras de levier :} \quad z = 0{,}5\, d\, (1 + \sqrt{1 - 2\mu}) = 0{,}1117 \text{ m}$$

$$\text{Acier longitudinal supérieur (chapeau) :} \quad A_{s1} = \frac{M_u}{z \sigma_{su}} = \frac{0{,}02617 \times 10^4}{0{,}1117 \times 435} = 5{,}39 \text{ cm}^2\text{/m}$$

soit HA10 , s = 145 mm

Acier transversal supérieur : $A_{s2} = A_{s1} / 4 = 1{,}35$ cm²/m, soit HA6, s = 210 mm

Effort tranchant : $V_u = (1{,}35\, g + 1{,}5\, q_1)\, L = 24{,}55$ kN

$$\text{Cisaillement :} \quad \tau_u = \frac{V_u}{d} = \frac{0{,}02455}{0{,}12} = 0{,}20 \text{ MPa} < \frac{0{,}07 f_{c28}}{1{,}5} = 1{,}17 \text{ MPa}$$

La vérification en ELS n'est pas nécessaire, car en fissuration peu préjudiciable :
- la contrainte de compression du béton est loin d'atteindre la limite 0,6 f_{c28} qui correspond à un $\beta = \frac{M}{bd^2}$ de l'ordre de 3 soit $\mu = 0{,}128 < \frac{1{,}35\beta}{\sigma_{bu}} \approx \frac{1{,}35 \times 3}{14{,}17} = 0{,}286$ OK ;
- la contrainte de l'acier n'est pas à vérifier.

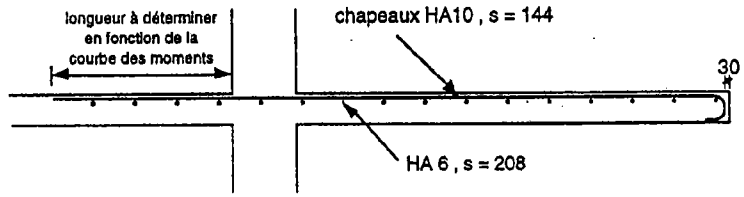


Fig. 3 – Ferraillage du balcon.

On doit de plus :
- s'assurer de l'équilibre statique du porte-à-faux pour éviter un basculement avec les coefficients 1,35 et 1,5 pour les charges du porte-à-faux et 0,9 seulement pour les charges permanentes de la partie arrière de la dalle ;
- ancrer les aciers de chapeaux suffisamment loin dans la travée arrière jusqu'au point de moment nul le plus éloigné (suivant les différents cas de charge), majoré de 0,8 h ;
- veiller à ce que le coude d'ancrage en tête de balcon aille jusqu'à 30 mm du nez du balcon (soumis aux intempéries en général) ; l'incliner sur la verticale si nécessaire pour le loger dans le béton.

2.2. EXEMPLE 2. BALCON D'ANGLE

On considère un partage des charges selon un angle à 45° (ligne BC de la figure 4).

On admet que le triangle ABC est repris en porte-à-faux (aciers A_1) sur la poutre-console AHJC de largeur b_2 (acier A_2).

Cette poutre AHJC est soumise à une torsion du fait de la charge excentrée du triangle ABC, partiellement équilibré par la charge permanente du rectangle KHNJ situé de l'autre côté et de largeur $L - b_2$.

• **Données**
Portée : L = 2,10 m
Longueur : L_1 = 5,0 m
Garde-corps de 0,4 kN/m
Sans étanchéité, donc fissuration préjudiciable, enrobage de 30 mm et σ_s = 202 MPa
Béton f_{c28}= 25 MPa et acier f_e = 500 MPa

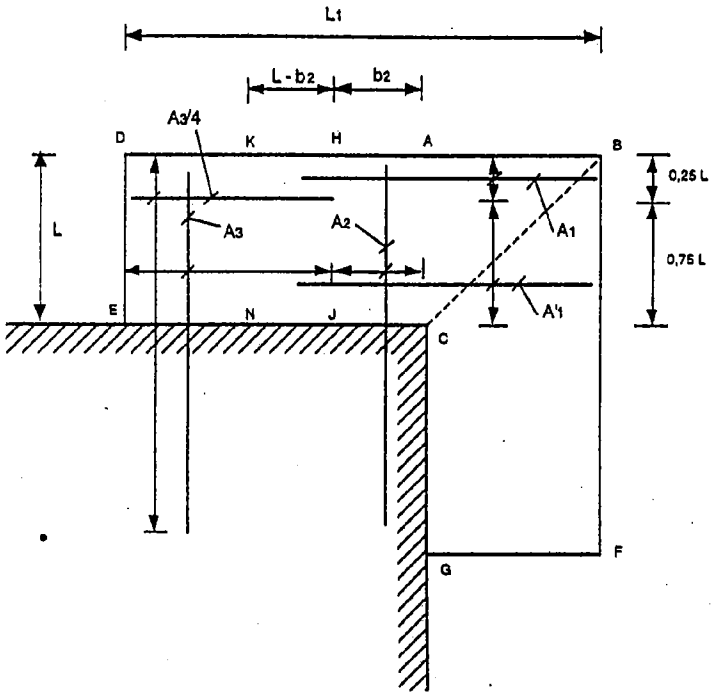


Fig. 4 – Balcon d'angle : les aciers de l'autre partie CBGF n'a pas été représentée.

• **Calculs**

Charge permanente : $g_1 = 24{,}5\ h$ pour une épaisseur h à déterminer
Charge d'exploitation : $q_1 = 3{,}5$ kN/m²
Charge ELS : $p = g_1 + q_1$
Charge ELU : $p_u = 1{,}35\ g_1 + 1{,}5\ q_1$

Nous partagerons le triangle ABC en deux bandes de largeurs respectives : $b = 0{,}25$ L et $b' = 0{,}75$ L. La première reprend le garde-corps.

Moment repris par les aciers A_1 : $M_1 = (g_1 + q_1) b \dfrac{L^2}{2} + g_2 \dfrac{L^2}{2}$ pour $b = 0{,}25$ L.

Moment repris par les aciers A'_1 : $M'_1 = (g_1 + q_1) b' \dfrac{b'^2}{2}$ pour $b' = L - b = 0{,}75$ L.

La console porteuse ACJH aura une largeur b_2 calculée de telle sorte que :

– la contrainte de compression du béton ne dépasse pas $0{,}6 f_{c28}$ en ELS, soit $\beta = \dfrac{M}{bd^2} < 3$;

– le cisaillement combiné d'effort tranchant et de torsion (due à la charge excentrée du triangle ABC) ne dépasse pas la contrainte limite sans aciers d'effort tranchant, soit :

$$\frac{0{,}07 f_{c28}}{\gamma_b} = \frac{0{,}07 \times 25}{1{,}5} = 1{,}17 \text{ MPa.}$$

Nous déterminerons la position de la fibre neutre en ELS par $\alpha = x/d$, racine de l'équation :

$$\alpha = \sqrt{\frac{90\ \beta\ (1 - \alpha)}{\sigma_s\ (3 - \alpha)}} \quad \text{([3], p. 23).}$$

Données

L =		m	2,1
h =		m	0,19
g_1 =	24,5 × h	kN/m²	4,655
g_2 =	garde-corps	kN/m	0,4
q_1 =	exploitation	kN/m²	3,5
q_2 =	1,3 / 5	kN/m	0,26

Triangle ABC. Bande 1

$b =$	$\frac{L}{4}$	m	0,525
$d =$	h – enrobage – demi-diamètre	m	0,155
$M =$	$(g_1 + q_1)\frac{bL^2}{2} + g_2\frac{L^2}{2}$	kNm	10,32
$\beta =$	$\frac{M}{bd^2} < 3$	MPa	0,818
$\alpha =$	racine de $\alpha = \sqrt{\frac{90\,\beta\,(1-\alpha)}{\sigma_s\,(3-\alpha)}}$		0,3064
$\sigma_b =$	$\frac{\sigma_s}{15}\frac{\alpha}{1-\alpha}$	MPa	5,95
$A_s =$	$\frac{M}{\sigma_s d(1-\alpha/3)}$	cm^2	3,67

soit 5 HA10 , s = 105 (= 5 × 0,785 = 3,92 cm^2)

Triangle ABC. Bande 2

$b =$	$\frac{3L}{4}$	m	1,575
$M =$	$(g_1 + q_1)\,b\,\frac{(0{,}75L)^2}{2}$	kNm	15,93
$\beta =$	$\frac{M}{bd^2}$	MPa	0,421
$\alpha =$	racine de $\alpha = \sqrt{\frac{90\,\beta\,(1-\alpha)}{\sigma_s\,(3-\alpha)}}$		0,2285
$\sigma_b =$	$\frac{\sigma_s}{15}\frac{\alpha}{1-\alpha}$	MPa	3,99
$A_s =$	$\frac{M}{\sigma_s d(1-\alpha/3)}$	cm^2	5,51

soit 7 HA10 , s = 225 (= 5,50 cm^2)

Console porteuse AHJC

$d =$	h – 0,03 – 0,01 – 0,008	m	0,142
$b_2 =$	par essais successifs de 0,3 L à L	m	0,65
$M =$	$(g_1 + q_1)b_2\frac{L^2}{2} + g_2 b_2 L + q_2 b_2 \times 1m + (g_1 + q_1)\frac{L^3}{3} + g_2 L^2 + q_2 L \times 1m$	kNm	39,89
$\beta =$	$\frac{M}{bd^2}$	MPa	3,04
$\alpha =$	racine de $\alpha = \sqrt{\frac{90\,\beta\,(1-\alpha)}{\sigma_s\,(3-\alpha)}}$		0,5146
$\sigma_b =$	$\frac{\sigma_s}{15}\frac{\alpha}{1-\alpha}$	MPa	14,28
$A_s =$	$\frac{M}{\sigma_s d(1-\alpha/3)}$	cm^2	16,79
$V_u =$	$(1{,}35\,g_1 + 1{,}5\,q_1)(b_2 L + \frac{L^2}{2}) + 1{,}35\,g_2\,(b_2 + L)$	kN	42,66
$\tau_{uV} =$	$\frac{V_u}{b_2 d}$	MPa	0,46
$T_{u1} =$	$(1{,}35\,g_1 + 1{,}5\,q_1)\,\frac{L^2}{2}\left(\frac{b_2}{2} + \frac{L}{3}\right) + 1{,}35\,g_2\,L\,\frac{b_2 + L}{2}$	kNm	27,63
$T_{u2} =$	$1{,}35\,(g_1 L + g_2)(L - b_2)\,\frac{L}{2}$	kNm	20,91
$T_u =$	$Tu_1 - Tu_2$	kNm	6,71
$t =$	Max ($\frac{h}{6}$; enrobage)	m	0,032
$\Omega =$	$(h - t)(b_2 - t)$	m^2	0,0976
$\tau_{uT} =$	$\frac{T_u}{2t\Omega}$	MPa	1,07
τ_u^2	$\tau_{uV}^2 + \tau_{uT}^2 < 1{,}17^2 = 1{,}36$	$(MPa)^2$	1,17

soit 9 HA16 , s = 82 (= 18,09 cm^2) sur 0,74 m de largeur.

Console courante

d =	h – 0,03 – 0,005	m	0,155
M =	$(g_1 + q_1)\frac{L^2}{2} + g_2 L + q_2$	kN/m	19,08
β =	$\frac{M}{bd^2} < 3$	MPa	0,794
α =	racine de $\alpha = \sqrt{\frac{90\,\beta\,(1-\alpha)}{\sigma_s\,(3-\alpha)}}$		0,3025
σ_b =	$\frac{\sigma_s}{15}\frac{\alpha}{1-\alpha}$	MPa	5,84
A_s =	$\frac{M}{\sigma_s d(1-\alpha/3)}$	cm²/m	6,78
At =	$\frac{A_s}{4}$	cm²/m	1,69

soit HA10 , s = 115 et HA6 , s = 167

Les aciers du balcon perpendiculaire sont calculés de la même façon. Les aciers longitudinaux de l'un servant d'aciers transversaux de l'autre.

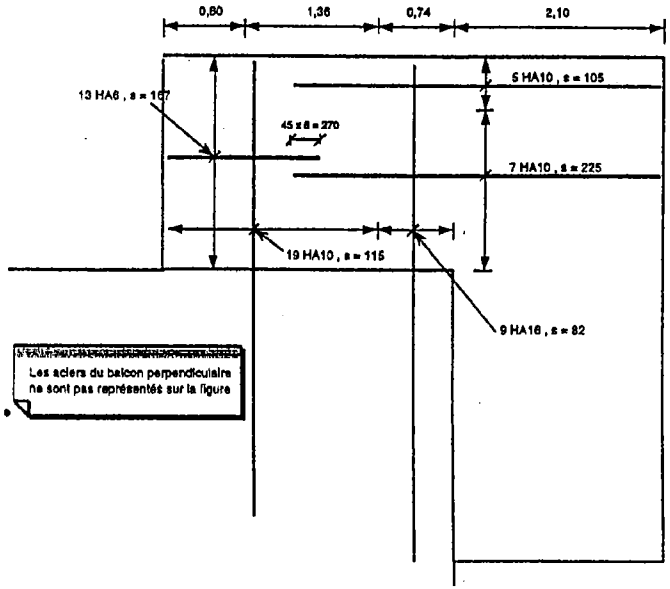

0,80
1,36
0,74
2,10
5 HA10 , s = 105
13 HA6 , s = 167
45 x 6 = 270
7 HA10 , s = 225
19 HA10 , s = 115
9 HA16 , s = 82
Les aciers du balcon perpendiculaire ne sont pas représentés sur la figure

Fig. 5 – Balcon d'angle . Ferraillage.

2.3. CONSOLE SANS DALLE ARRIÈRE. POUTRE DE TORSION

En l'absence de dalle de continuité, la flexion d'encastrement du porte-à-faux est reprise par torsion de la poutre d'appui (Fig. 6).

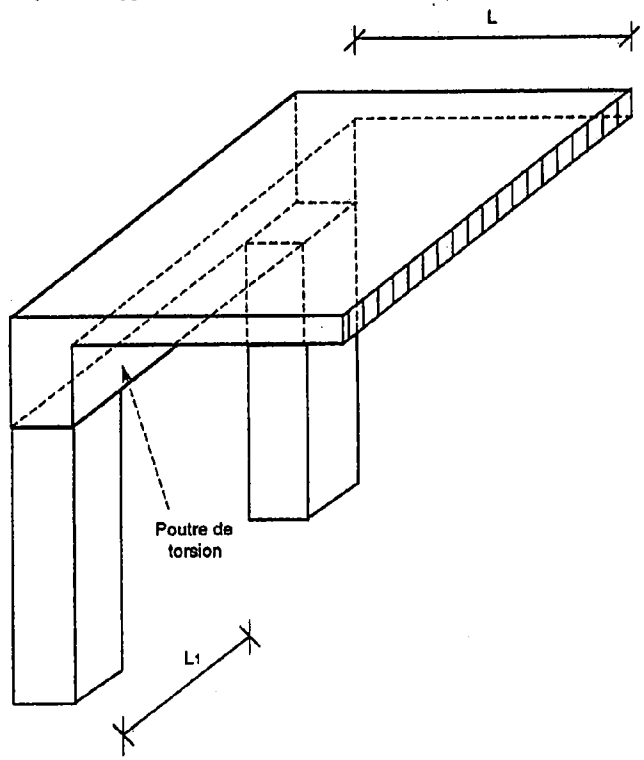


Fig. 6 – Console encastrée dans une poutre de torsion.

Le moment de flexion de la console $\frac{pL^2}{8}$ devient le moment de torsion de la poutre par unité de longueur de la poutre. Le moment de torsion maximal vaut : $T = \frac{L_1}{2}\frac{pL^2}{2}$.

Les aciers longitudinaux et transversaux de torsion sont à ajouter aux aciers longitudinaux de flexion et transversaux d'efforts tranchant de la poutre. (Voir exemple numérique en [3], p. 156).

3. CONSOLES COURTES (CORBEAUX)

Conçues pour supporter des charges concentrées ou réparties relativement importantes, on rencontre ce type de consoles au droit des joints de dilatation ou de tassement, sous les chemins de ponts roulants, etc. (Fig. 7).

Ces consoles peuvent être ponctuelles ou filantes.

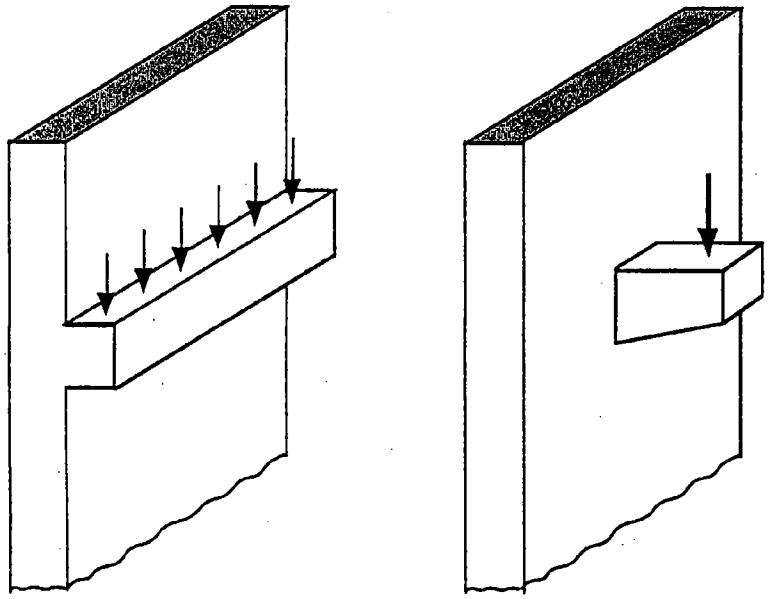


Fig. 7 – Consoles courtes.

Le calcul découle de la méthode des bielles (Fig. 8 et chapitre 12, §. 9) avec un acier de tirant en partie supérieure, une bielle inclinée à au moins 45° sur l'horizontale. On doit s'assurer de l'équilibre du tirant et de la bielle dans le poteau, ce qui se traduit par un moment à reprendre par le poteau égal à $P \times a$.

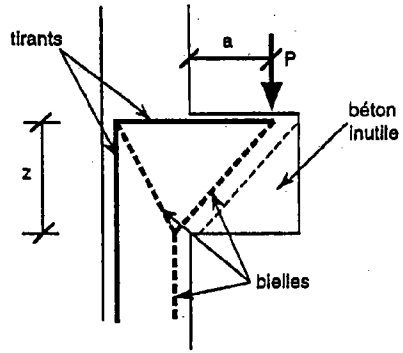


Fig. 8 – Console courte . Tirant et bielle.

De l'examen de la figure 8, on peut déduire que :
- le tirant doit être ancré totalement à ses deux extrémités (crochets par exemple) ;
- le béton situé sous la bielle inclinée de la console ne sert à rien et peut être supprimé (console à hauteur variable).

Les *Règles BAEL 91* indiquent une méthode de calcul qui donne les limites d'emploi de la méthode, le bras de levier, les sections d'acier.

En particulier, on a vu au chapitre 12, §. 9 la nécessité de disposer d'armatures complémentaires horizontales lorsque la distance de la charge à l'appui est inférieure à z.

• Dispositions BAEL 91

Hauteur minimale d	$d \geqslant \text{Max}\,[a\,;\,L]$
Cisaillement $\tau_u = \dfrac{V_u}{b_o d} \leqslant$	$\text{Min}\,[0{,}03\,(2+\rho)\,.\,\text{Min}\,(f_{c28}\,;\,30)\,:\,4)]$
Bras de levier z =	$\text{Min}\left[0{,}7\,d\left(1+\dfrac{\rho}{10}\right)\,;\,1{,}2\,a\left(0{,}8+\dfrac{\rho}{5}\right)\right]$
Acier de tirant A_s =	$\dfrac{M_{uys}}{z f_e}$
Aciers inférieurs =	$\dfrac{A_s}{10}$
Aciers intérieurs $A_r = \lambda A_s$ avec λ = (comprenant l'acier inférieur $A_s/10$)	$\text{Max}\left[0{,}1\,;\,\dfrac{1}{4}\left(\rho+\dfrac{12\tau_u}{f_{c28}}-1\right)\right]$

avec : $\rho = \min\left[\frac{d}{4} ; 4\right]$; $V_u = P = 1{,}35\,G + 1{,}5\,Q$; $M_u = P\,a$.

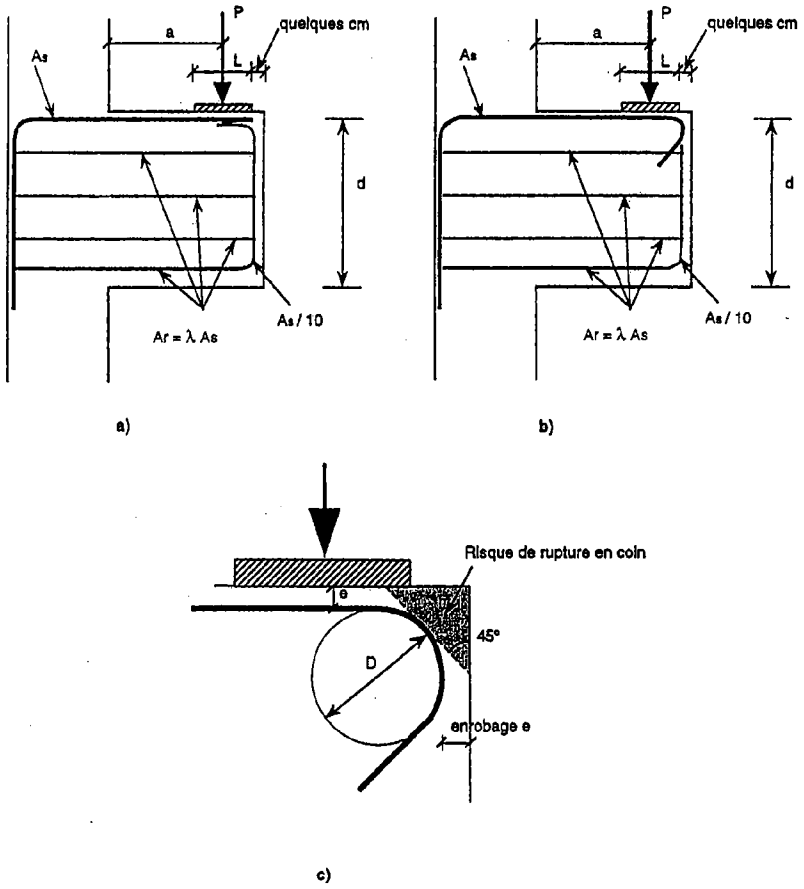


Fig. 9 – Dispositions BAEL 91.

On veillera particulièrement :

- à l'ancrage de l'acier de tirant en tête de console. Si le diamètre du mandrin de cintrage D de l'acier ne permet pas de réaliser une boucle vers le bas (comme sur la Fig. 9-b), on retournera la boucle dans le plan horizontal (Fig. 9-a) et on disposera d'un crochet en extrémité de l'acier inférieur remonté ;
- à ne pas disposer la charge trop près de l'extrémité pour éviter un éclatement du béton d'angle (Fig. 9-c) ;
- à ancrer l'acier de tirant dans le poteau en le retournant verticalement vers le bas en recouvrement des aciers verticaux du poteau.

3.2. *MOMENTS DANS LE POTEAU*

La répartition du moment apporté par la console dans le poteau est fonction des conditions d'extrémité des poteaux.

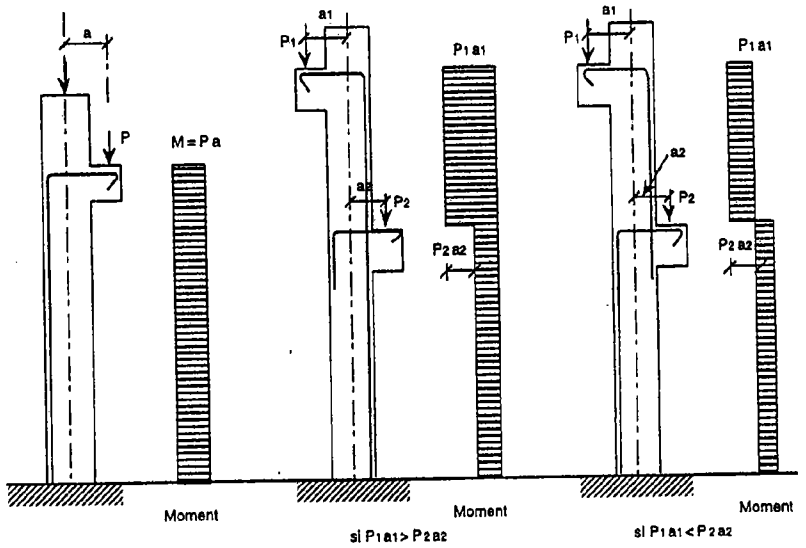


Fig. 10 – Poteaux-consoles.

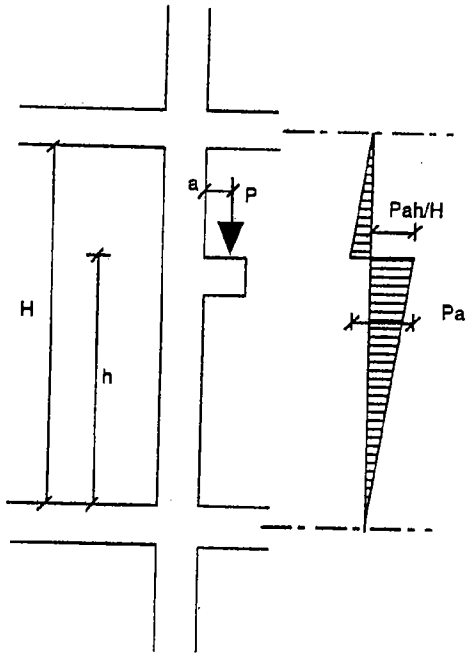


Fig. 11 – Poteau articulé aux deux extrémités.

3.3. EXEMPLE

Soit un poteau-console de 0,40 m × 0,40 m supportant :

– une charge centrée en tête : P_1 (G_1 = 32 kN ; Q_1 = 27 kN ; H_1 = 9 kN) ;

– une charge sur console : P_2 (G_2 = 74 kN ; Q_2 = 42 kN ; H_2 = 6 kN)

Le poteau est protégé des intempéries ; enrobage 15 mm.
La force horizontale H_1 est une charge variable indépendante de la charge verticale.
La force horizontale H_2 est la composante horizontale de la charge variable, la composante verticale étant Q_2.

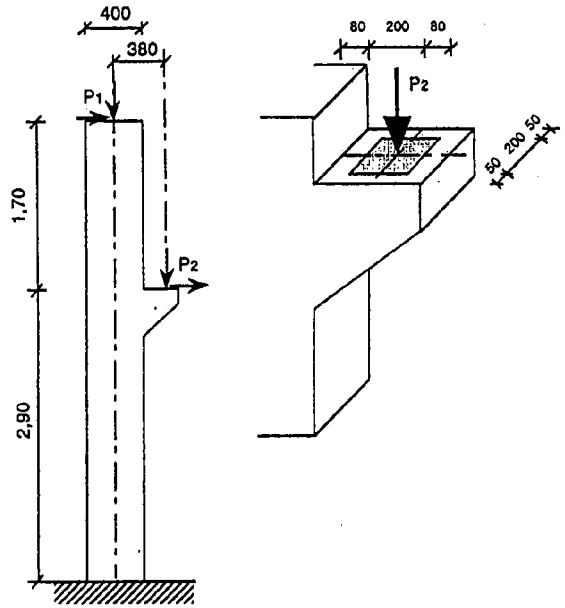


Fig. 12 – Exemple de poteau et console.

3.3.1. Console - Calcul à l'ELU

Matériaux : acier f_e = 500 MPa et béton f_{c28} = 25 MPa
$V_u = P_2 = 1{,}35\ G_2 + 1{,}5\ Q_2 = 1{,}35 \times 74 + 1{,}5 \times 42 = 162{,}9$ kN
a = 0,18 m
b_0 = 0,30 m
$M_u = P\ a = 162{,}9 \times 0{,}18 = 29{,}32$ kNm
L = 0,20 m
$d \geq$ Max [a ; L] = 0,20 m, soit d = 0,23 m (une économie de béton n'est pas toujours compensée par une dépense d'acier due à la diminution de z).

$$\rho = \text{Min}\left[\frac{d}{4}\right] = \frac{0{,}23}{0{,}18} = 1{,}278$$

Cisaillement :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} = \frac{0{,}162\,9}{0{,}30 \times 0{,}23} = 2{,}36 \text{ MPa} \leq [0{,}03\ (2 + \rho)\ .\ \text{Min}\ (f_{c28}\ ;\ 30)\ ;\ 4] = \text{Min}\ [2{,}46\ ;\ 4]$$

2,36 < 2,46 MPa OK

Bras de levier $z = \text{Min}\left[0{,}7d\left(1+\frac{\rho}{10}\right) ; 1{,}2a\left(0{,}8+\frac{\rho}{5}\right)\right]$

$= \text{Min}\,[0{,}182 ; 0{,}228] = 0{,}182$ m

Acier de tirant $A_s = \frac{M_u \gamma_s}{z f_e} = \frac{0{,}029\,32 \times 1{,}15 \times 10^4}{0{,}182 \times 500} = 3{,}71\ \text{cm}^2$, auquel on doit rajouter l'acier reprenant l'effort de traction 1,35 H_2 :

$\frac{1{,}35\,H_2 \gamma_s}{f_e} = \frac{1{,}35 \times 0{,}006 \times 1{,}15 \times 10^4}{500} = 0{,}19\ \text{cm}^2$

soit : $3{,}71 + 0{,}19 = 3{,}90\ \text{cm}^2$ avec 3 HA14 (= 4,62 cm²)

Aciers inférieurs : $\frac{A_s}{10} = \frac{3{,}90}{10} = 0{,}39\ \text{cm}^2$, soit 2 HA6

$\lambda = \text{Max}\left[0{,}1 ; \frac{1}{4}\left(\rho + \frac{12\tau_u}{f_{c28}} - 1\right)\right] = \text{Max}\left[0{,}1 ; \frac{1}{4}\left(1{,}278 + \frac{12 \times 2{,}36}{25} - 1\right)\right] = 0{,}353$

Aciers intérieurs $A_r = \lambda A_s = 0{,}353 \times 3{,}90 = 1{,}38\ \text{cm}^2$ (comprenant l'acier inférieur $A_s/10$) dont on retranche les 3 HA6 inférieurs, d'où $1{,}38 - 3 \times 0{,}283 = 0{,}53\ \text{cm}^2$, soit 2 HA6 (0,566 cm²) en un lit intermédiaire que nous réaliserons par un cadre horizontal.

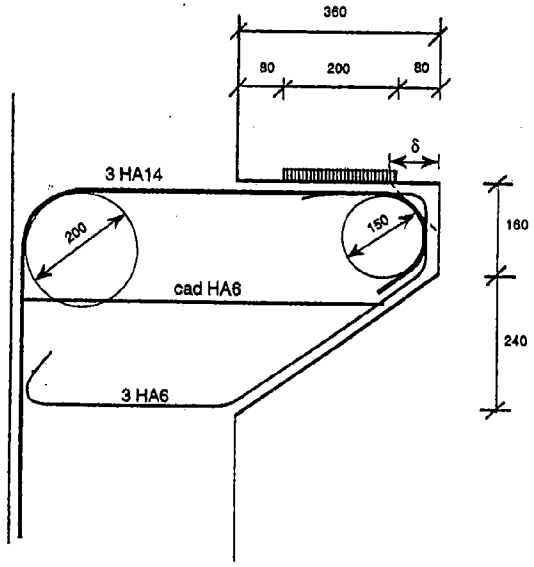


Fig. 13 – Ferraillage de la console.

La longueur $\delta = 2e + \varnothing\,(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + D\,(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

$= 2 \times 15 + 14\,(2 - 0{,}707) + 150\,(1 - 0{,}707) = 92$ mm est supérieure à la distance au bord qui est de 80 mm. Il faut mettre un acier complémentaire dans la fraction $\frac{92-80}{200} = 0{,}06$ de $A_s = 0{,}06 \times 3{,}9 = 0{,}23\ \text{cm}^2$ soit 1 HA6 pour éviter l'éclatement de l'extrémité de la console. Or, si l'on retourne les aciers inférieurs comme indiqué sur la figure 13, on a 3 HA6, ce qui convient. Pour le diamètre 6, on a :

$\delta = 2 \times 15 + 6\,(2 - 0{,}707) + 70\,(1 - 0{,}707) = 58 < 80$ mm OK.

A défaut, on peut ajouter un acier de petit diamètre horizontalement en recouvrement de l'acier principal de tirant.

Les diamètres des mandrins de cintrage peuvent être lus sur le tableau 21 en fin de chapitre 1. On trouve 150 mm pour un ancrage et 200 mm pour un coude d'une barre HA14.

3.3.2. Poteau

Charge ELU : $N_u = 1{,}35(G_1 + G_2) + 1{,}5(Q_1 + Q_2) = 246{,}6$ KN

Moment extérieur :

$M_u = 1{,}5\,H_1\,(1{,}7 + 2{,}9) + (1{,}35G_2 + 1{,}5Q_2) \times 0{,}38 + 1{,}5\,H_2 \times 2{,}9 = 150{,}1$ KNm

Excentricité : $e_u = \frac{M_u}{N_u} = \frac{150{,}1}{246{,}6} = 0{,}6087$ m

Longueur du poteau : 2,90 + 1,70 = 4,60 m

Longueur de flambement : $L_f = 2 \times 4{,}60 = 9{,}20$ m

Rayon de giration : $i = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0{,}289 \times 0{,}40 = 0{,}1155$ m

Élancement : $\lambda = \frac{L_f}{i} = 79{,}7$

Utilisation du programme « PELQ » (voir chapitre 8, §. 3.3) :

- chargement à 90 jours ;
- climat tempéré (55 % HR) ;
- charge permanente non pondérée = $G_1 + G_2 = 0{,}106$ MN
- charge variable non pondérée = $Q_1 + Q_2 = 0{,}069$ MN
- distance de l'axe des aciers à la paroi = enrobage + cadre + demi-diamètre = 15 + 6 + 10 = 31 mm ;
- armatures 3HA20 à 0,031 m ; 2HA20 à 0,20 m ; 3HA20 à 0,369 m.

Résultats : $N_{ulim} = 0{,}2575$ MN > $N_u = 0{,}2466$ **OK**

Remarques

1. En toute rigueur, il faudrait tenir compte de l'arrondi des cadres dans la détermination de la position des barres d'angles. On trouve (Fig. 14) :

$d' = e + \varnothing_t + \frac{D}{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \varnothing_L f\frac{\sqrt{2}}{4} = 15 + 6 + \frac{30}{2} \times 0{,}293 + 20\,\frac{1{,}414}{4} = 32{,}47$ mm (peu différent de 31 mm). Une vérification avec « PELQ » donne pour des aciers situés à 32,47 mm, un effort normal résistant de 0,2553 MN > 0,2466 MN. La différence avec des aciers situés à 31 mm est de 0,8 %. Dans la pratique, on calcule avec l'enrobage à l'axe sans tenir compte des arrondis des cadres.

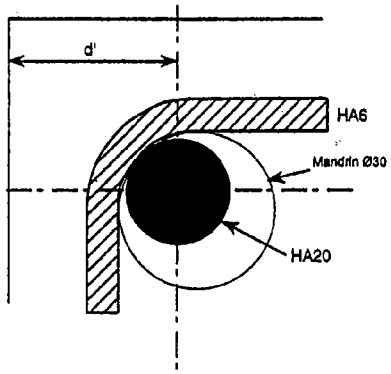


Fig. 14 – Arrondi en angles.

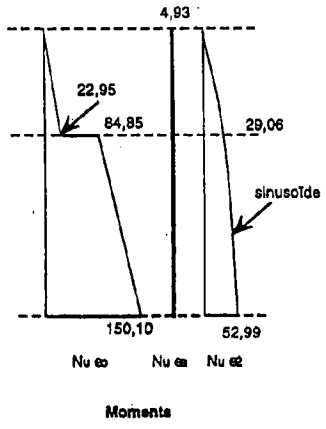


Fig. 15 – Moments dans le poteau.

2. A la cote 2,90 m, on peut vérifier que l'on peut ne conserver que les 4 HA20 situés dans les angles en utilisant le programme de vérification des sections rectangulaires en flexion composée « FLEXRECT » (chapitre 8, §.5.2).

cote	N_u kN	M_u (kNm) (Fig. 15)	Aciers	M_R (kNm) d'après « FLEXRECT »
2,90⁺	$1{,}35\,G_1 + 1{,}5\,Q_1 = 83{,}7$	$1{,}5 \times 9 \times 1{,}70 = 22{,}95$	4 HA20	108,6 > 22,95 OK
2,90⁻	$83{,}7 + 1{,}35\,G_2 + 1{,}5\,Q_2 = 246{,}6$	$22{,}95 + (1{,}35\,G_2 + 1{,}5\,Q_2) \times 0{,}38 = 84{,}85$	4 HA20	108,6 > 84,85 OK *

Le poteau sera armé de 8 HA20, soit 3 HA20 sur chaque face, dont 4 HA20 sur toute la hauteur (Fig. 16).

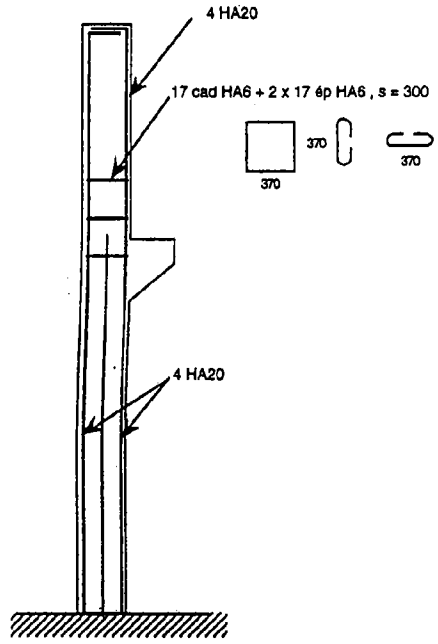


Fig. 16 – Ferraillage du poteau.

3. La longueur de flambement $L_f = 9{,}20$ m est inférieure au maximum de $15\,h = 6$ m et de $20\,e_1 = 20 \times 0{,}6087 = 12{,}17$ m. On pourrait utiliser la méthode forfaitaire du BAEL, art. A.4.3.5 par un calcul en flexion composée avec une excentricité forfaitaire du deuxième ordre qui vaudrait 0,1746 m. On trouverait alors une charge limite de 0,275 MN, valeur un peu différente de celle obtenue par la méthode exacte (6,8 %). Outre le fait que les calculs ne sont pas simples, la précision est moins bonne.

4. CONSOLES LONGUES

Les consoles longues sont généralement constituées d'une dalle reposant sur des poutres consoles. Les dalles sont appuyées sur deux, trois ou quatre côtés (Fig. 17).

La dalle peut être remplacée par une structure plus légère en métal ou en bois. Les poutres peuvent être réalisées en métal ou en bois, généralement du lamellé collé.

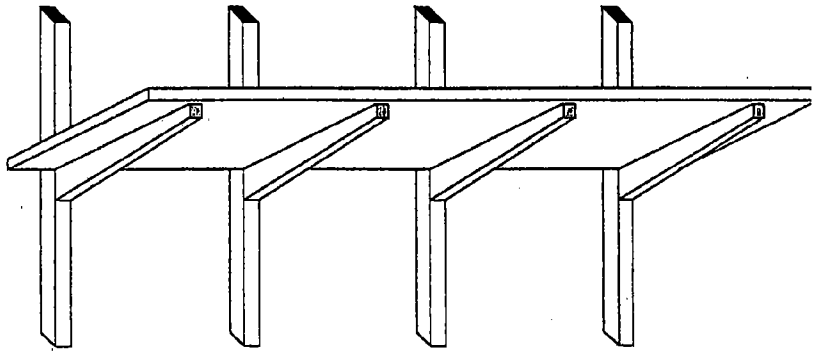


Fig. 17 – Exemple de console longue en béton avec dalle appuyée sur deux côtés.

Pour une structure en béton, le principe de calcul est le même que pour un plancher :
- calcul de la dalle : généralement en continuité dans une direction et éventuellement appuyée sur une poutre de rive ;
- calcul de la console encastrée dans le poteau.

Pour une structure métallique, on peut utiliser des bacs acier ou aluminium reposant sur des pannes, elles-mêmes appuyées sur les consoles en acier (Fig. 18).

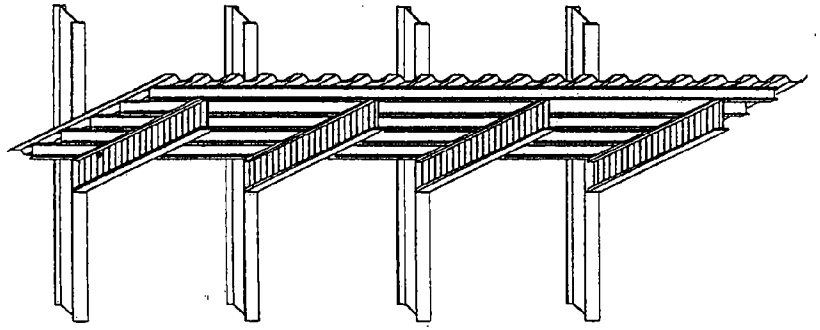


Fig. 18 – Exemple de console longue en acier avec pannes et bacs acier.

On peut utiliser le programme « DALLRETRA » pour le calcul des dalles à bords libres, articulés ou encastrés.

4.1. DIMENSIONNEMENT DES DALLES
Programme « EPAISDAL » *

L'épaisseur des dalles portant dans une direction peut être déterminée en utilisant le programme « EPAISDAL ».

4.1.1. Mode d'emploi

Les données sur une même ligne sont à séparer par une virgule. Le poids propre est automatiquement pris en compte.

Ligne 1 ρ
Taux d'humidité relative en %. On peut prendre 55 dans le quart Sud-Est de la France et 70 dans le reste de la France.

Ligne 2 **Etanc**
= 0 s'il n'y a pas d'étanchéité
= 1 s'il y a étanchéité
(sert à déterminer le rayon moyen pour le calcul du fluage)

Ligne 3 **L**
Portée en m

Ligne 4 A_o
Age du béton en jours lors du décoffrage

Ligne 5 g_1, A_1
g_1 = charges permanentes (kN/m²) autres que le poids propre (étanchéité, chapes, cloisons, ...) appliquées à un âge du béton égal à A_1 jours
A_1 = âge du béton (en jours) lors de l'application du complément de charges permanentes

Ligne 6 q, A_2
q = charges de courte durée (kN/m²) appliquées à un âge du béton de A_2 jours
A_2 = âge du béton (en jours) lors de l'application des charges variables. Le plus pénalisant est de prendre 10 ans, soit A_2 = 3 650 jours.

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées.

Ligne 7 f_{rel}
Flèche relative admissible en fraction de la portée (par exemple 200 , 250 , 300 , 500, ...).

Ligne 8 f_n
= 1 si f_{rel} est une flèche nuisible (depuis juste après le décoffrage jusqu'à l'application de la charge variable q) ;
= 2 si f_{rel} est une flèche totale, c'est-à-dire y compris la flèche instantanée du poids propre.

Ligne 9 k_1 , k_2
Coefficients d'encastrement en fraction du moment isostatique M_0 à l'appui gauche et à l'appui droit (par exemple $k_1 = -0{,}15$ et $k_2 = -0{,}60$).

Ligne 10 f_{c28} , f_e , σ_s
f_{c28} = résistance du béton à 28 jours (MPa)
f_e = limite élastique de l'acier (MPa)
σ_s = contrainte limite de l'acier en ELS (MPa). Par exemple, pour f_{c28} = 25 MPa, σ_s = 176 en fissuration préjudiciable, σ_s = 202 MPa en fissuration très préjudiciable et σ_s = 500 MPa en fissuration peu préjudiciable.

4.1.2. Exemple

Travée de rive d'une dalle continue portant dans une direction de 7,0 m de portée supportant 0,2 kN/m² d'étanchéité et une charge climatique de 1,0 kN/m². Les moment d'encastrements sont supposés pris égaux à $-0{,}15\ M_0$ et $-0{,}55\ M_0$. Pour des raisons d'esthétique, la flèche totale ne doit pas dépasser 1/200. Fissuration peu préjudiciable.

Données

70	taux d'humidité relatif de l'air
1	avec étanchéité
7	portée
14	âge du béton lors du décoffrage
0,2 28	poids de l'étanchéité posée à 28 jours d'âge du béton
1 3650	charge climatique à 10 ans
200	flèche admissible = 1/200
2	la flèche *totale* ne doit pas dépasser la flèche de 1/200e
−0,15 −0,55	coefficients d'encastrement à gauche et à droite
25 500 500	f_{c28} , f_e , σ_s (fissuration peu préjudiciable)


```
EPAISDAL
Voulez-Vous Entrer les Donnees :
      1 = au Clavier,
      2 = en DATA
=? 2

Voulez-Vous les Obtenir les Sorties
     1 = a l'Ecran seulement,
     2 = a l'Ecran et sur l'Imprimante,
     3 = sur l'Imprimante seulement,
=? 1


DONNEES
-------
Humidite Relative = 70%
Etancheite sur une Face
Portee (m) = 7.000 m

                Charge (kN/m2)  Age Beton (jours)
Poids Propre        25 h             14
Autre Perm.         0.20             28
Variable            1.00           3650

Fleche relative admissible = 1/ 200 (en fleche totale)
Coeff. d'encastrement a gauche = -0.150 Mo et a droite = -0.550 Mo
fc28 = 25.0 MPa , fe = 500 MPa ,  sigmas (ELS) = 500.0 MPa

RESULTATS
---------
PATIENTEZ ......

Moment de fermeture relatif en Travee = 0.650 Mo
   Moment enveloppe relatif en Travee = 0.700 Mo
Epaisseur de la Dalle      = 0.210 m , Hauteur utile = 0.185 m
Fleche Totale              = 34.25 mm , soit 1/ 204
Aciers Inferieurs Filants =  4.94 cm2
Chapeaux Gauches :    1.85 cm2 sur  0.700 m
Chapeaux Droits  :    3.84 cm2 sur  1.400 m
vu?
```

4.2. CALCUL DES DALLES PORTANT DANS UNE OU DEUX DIRECTIONS

Le calcul des dalles portant dans une direction ne pose pas de problème particulier. Elles se calculent comme des poutres. Pour les dalles portant dans deux directions, les calculs deviennent compliqués lorsque l'on a des conditions d'appuis avec encastrement ou bords libres.

On pourra utiliser le programme « DALLRETRA » qui utilise la méthode des lignes de rupture pour des conditions d'appuis quelconques (articulé, encastré, libre) et pour des charges trapézoïdales (pression hydrostatique ou charges uniformes).

4.2.1. Mode d'emploi de « DALLRETRA » *

Dalles rectangulaires sous charges trapézoïdales (Fig. 19).

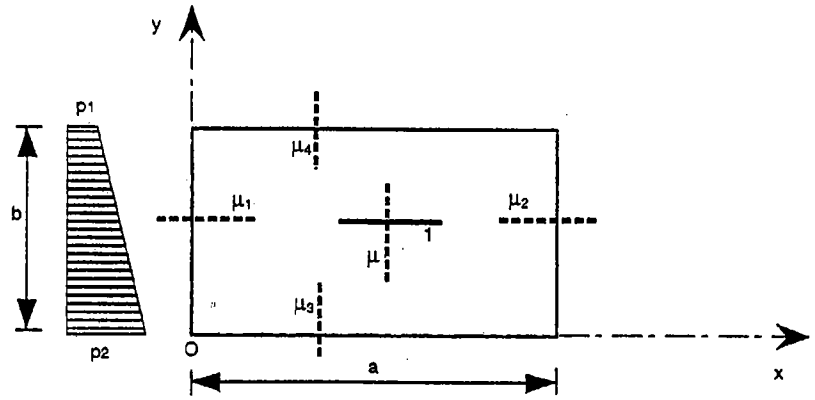


Fig. 19 – Dalle rectangulaire sous chargement trapézoïdal.

Ligne 1 $a, b, h, d_x, d_y, p_1, p_2$
a = dimension (m) de la dalle parallèlement à Ox
b = dimension (m) de la dalle parallèlement à Oy
h = épaisseur (m) de la dalle
d_x = hauteur utile (m) de la dalle pour des aciers parallèles à Ox
d_y = hauteur utile (m) de la dalle pour des aciers parallèles à Oy
p_1 = charge en haut (kN/m^2)
p_2 = charge en bas (kN/m^2)

Ligne 2 $\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$
Les coefficients μ sont :
– positifs pour un encastrement plus ou moins important suivant la valeur de μ ;
– nuls pour une articulation ;

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées.

– négatifs par convention (par exemple -1) pour un bord libre.
μ = rapport *a priori* de la section des aciers inférieurs parallèles à Oy sur la section des aciers parallèles à Ox.
μ_1 = rapport *a priori* de la section des aciers supérieurs situés sur l'appui gauche et parallèles à Ox sur la section des aciers parallèles à Ox.
μ_2 = rapport *a priori* de la section des aciers supérieurs situés sur l'appui droit et parallèles à Ox sur la section des aciers parallèles à Ox.
μ_3 = rapport *a priori* de la section des aciers supérieurs situés sur l'appui bas et parallèles à Oy sur la section des aciers parallèles à Ox.
μ_4 = rapport *a priori* de la section des aciers supérieurs situés sur l'appui haut et parallèles à Oy sur la section des aciers parallèles à Ox.

Ligne 3 f_{c28}, f_e
f_{c28} = résistance du béton (MPa)
f_e = limite élastique des aciers (MPa)

4.2.2. Exemple

Dalle de 10 m par 7 m, de 0,20 m d'épaisseur et reprenant une charge ultime de 9,6 kN/m^2, encastrée sur deux côtés, appui simple sur le troisième et bord libre sur le quatrième (Fig. 20).

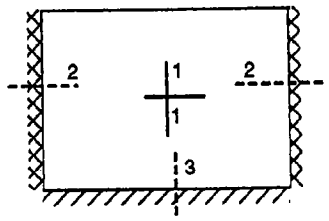


Fig. 20 – Exemple de dalle rectangulaire.

Données

10	7	0.20	0.17	0.16	9.6	9.6	$a, b, h, d_x, d_y, p_1, p_2$
1	1	2	2	3	–1		$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$
25	500						f_{c28}, f_e

```
DALRETRA
Voulez-Vous Entrer les Donnees :
   1 = au Clavier
   2 = en DATA
=? 1

Voulez-Vous les Resultats :
   1 = sur Ecran, seulement,
   2 = sur Ecran et sur Imprimante,
   3 = sur Imprimante seulement
=? 2

Les Donnees sur une meme Ligne sont a Separer par un espace
a,b,h,dx,dy,p1(haut),p2(bas) (m et kN/m2 ELU) =
   =? 10 7 0.2 0.17 0.16 9.6 9.6

mu(Ainf//Oy),mu1(Ch.Gauch);mu2(Ch.Dr.);mu3(Ch.Bas);mu4(Ch.Haut) =
   =? 1 2 2 3 -1

fc28 et fe (MPa) =? 25 500
```

Résultats

```
DONNEES
---------
   a       b      h        dx     dy       p1(haut)   p2(bas)
   m       m      m         m      m         kN/m2      kN/m2
10.000   7.000 0.200      0.170 0.160       9.600      9.600

Coefficients des Sections Relatives des Aciers :
Inf//Ox  Inf//Oy   Chapx.Gauc.  Chapx.Droit  Chapx. Bas  Chapx. Haut
 1.000    1.000       2.000        2.000       3.000       -1.000

 Beton   Acier
  MPa     MPa
 25.00   500.0

RESULTATS
---------
Moment Aciers Inferieurs // Cote de Longueur a =   15.947
Pour Cas 2 : Lambda1 = 6.300 m, Lambda2 = 5.000 m Lambda3 = 0.000 m

                      Moment  Long.Chap.  Acier   Pourc.  Diam.   Esp.
                       kNm        m        cm2      %      mm      mm
Aciers Inf. // Ox  :   15.95                2.20   0.13%  HA 8    228
Aciers Inf. // Oy  :   15.95                2.35   0.15%  HA 8    214
Chap.Gauch. // Ox  :   31.89      2.653     4.50   0.26%  HA10    175
Chap.Droit  // Ox  :   31.89      2.653     4.50   0.26%  HA10    175
Chapx. Bas  // Oy  :   47.84      3.303     6.90   0.41%  HA14    223

Surface Dalle  =    70.000 m2
Quantite Beton =    14.000 m3
Quantite Acier =    559.92 kg (estimation)
Densite au m2  =  7.999 kg/m2
Densite au m3  = 39.994 kg/m3
```


Les valeurs de λ_1, λ_2, λ_3 définissent la position des points d'intersection des lignes de rupture. (Fig. 21)

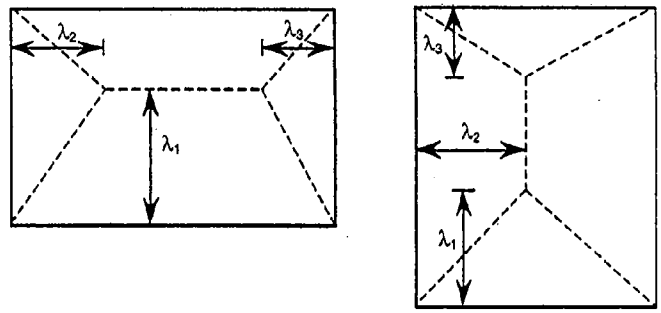


Fig. 21 – Paramètres λ_1, λ_2, λ_3.

5. RAMPES

Les rampes sont des éléments plats ou gauches reliant deux planchers de niveaux différents (Fig. 22).

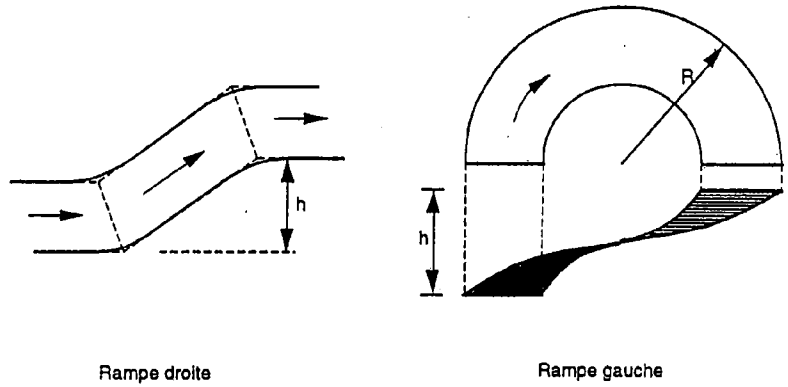


Fig. 22 – Types de rampes.

Les rampes droites se calculent comme des dalles inclinées dont la charge permanente de poids mort est exprimée en unité de longueur de rampe et la charge d'exploitation par unité de longueur horizontale.

Les rampes gauches se calculent comme des poutres gauches (voir chapitre 15 ci-après poutres gauches).

Ne pas oublier de prévoir des zones de raccordement courbes entre plans inclinés pour éviter aux véhicules un changement brusque de direction dans le sens vertical.

5.1. CALCUL DES MOMENTS ET EFFORTS TRANCHANTS DUS AUX CHARGES PERMANENTES (Fig. 23)

Pour un poids volumique ϖ et une épaisseur e, la charge par unité de longueur comptée suivant la pente vaut $\varpi\, e$. Pour un élément de longueur ds, la charge gravitaire est égale à $dG = \varpi\, e\, ds$.

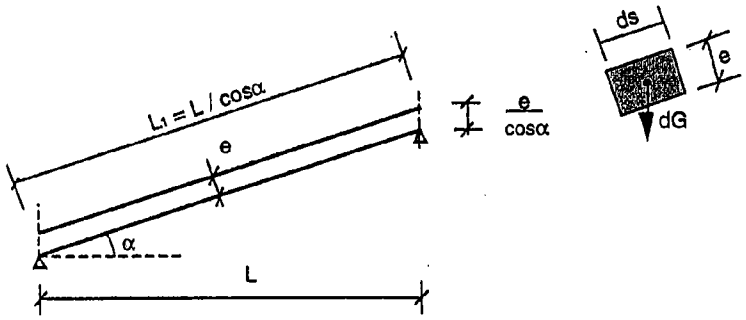


Fig. 23 – Charges de poids propre d'une rampe de pente α.

D'où :

– la réaction d'appui $R_g = \int_0^{L_1/2} dG = \dfrac{\varpi\, e\, L}{2 \cos \alpha}$ (force verticale) ;

– l'effort tranchant $V_g = R_g \cos \alpha = \dfrac{\varpi\, e\, L}{2}$ (perpendiculairement à la rampe) ;

– le moment $M_g = R_g\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{4}\right) = \dfrac{\varpi\, e\, L^2}{8 \cos \alpha}$.

Si l'on considère l'épaisseur suivant la verticale, on a $e_1 = \dfrac{e}{\cos \alpha}$ et le moment isostatique dû au poids propre se calcule comme pour une dalle d'épaisseur e_1, soit $M_g = \dfrac{\varpi\, e}{\cos \alpha} \dfrac{L^2}{8}$.

5.2. CALCUL DES MOMENTS ET EFFORTS TRANCHANTS DUS AUX CHARGES VARIABLES (Fig. 24)

La charge verticale dQ vaut $dQ = q\, dx$, d'où :

– la réaction d'appui $R_q = \dfrac{qL}{2}$;

– l'effort tranchant $V_q = \dfrac{q\, L \cos \alpha}{2}$ (perpendiculairement à la rampe) ;

– le moment isostatique $M_q = R\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{4}\right) = \dfrac{q\, L^2}{8}$.

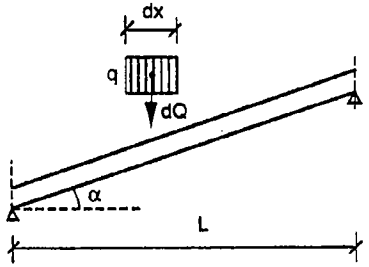


Fig. 24 – Charges variables.

Le calcul des moments d'une rampe est identique à celui d'une dalle horizontale dont l'épaisseur est comptée suivant la verticale.

EXEMPLE

Rampe de 15 % de pente de 7,0 m de longueur recevant des charges d'exploitation de 2,5 kN/m². Calcul pour une bande de 1 m de largeur.

$$\text{tg}\, \alpha = 0{,}15 \quad \text{d'où} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = 0{,}989$$

Epaisseur verticale déterminée comme une dalle de 7 m de portée supportant une charge d'exploitation $q = 2,5$ kN/m² : $e = 0,018\ L \sqrt[3]{25e + q}$ par approximations successives, d'où : $e = 0,263$ m. Retenons $e = 0,27$ m et $e_1 = \frac{e}{\cos \alpha} = 0,273$ m.

Réaction d'appui :

$$R_g = \frac{\varpi\ e_1\ L}{2} = \frac{24,5 \times 0,273 \times 7}{2} = 23,4 \text{ kN} \quad \text{et} \quad R_q = \frac{2,5 \times 7}{2} = 8,75 \text{ kN.}$$

Effort tranchant :

$$V_g = \frac{\varpi\ e\ L}{2} = \frac{24,5 \times 0,27 \times 7}{2} = 23,1 \text{ kN et } V_q = \frac{q\ L \cos \alpha}{2} = \frac{2,5 \times 7 \times 0,989}{2} = 8,85 \text{ kN.}$$

Moment isostatique :

$$M_g = \frac{24,5 \times 0,273 \times 7^2}{8} = 40,97 \text{ kN} \quad \text{et} \quad M_q = \frac{2,5 \times 7^2}{8} = 15,31 \text{ kNm.}$$

6. ESCALIERS

6.1. DÉFINITIONS (Fig. 25)

Cage d'escalier : murs ou voiles entourant l'escalier
Crémaillère : poutre inclinée servant de supports au milieu des marches
Emmarchement : largeur des marches perpendiculairement à la pente
Giron (marche) : distance entre deux nez de marche = L
Hauteur de marche (contremarche) = H
Ligne de foulée : trajet perpendiculaire aux nez de marche
Limon : poutre inclinée servant de supports aux extrémités des marches
Mur d'échiffre : limon remplacé par un mur ou voile
Paillasse : partie inclinée servant de support aux marches sur toute leur largeur
Palier : partie horizontale d'accès ou d'arrivée d'une volée
Pente = H/L
Profondeur de marche = giron + débord du nez de marche
Volée : ensemble de marches (3 au minimum) entre deux parties horizontales

6.2. DIMENSIONNEMENT DES ESCALIERS

6.2.1. Hauteur et largeur des marches : H et L

	Valeurs courantes	Valeurs extrêmes
H	0,16 à 0,17 m	0,13 à 0,17 m
L	0,26 à 0,29 m	0,26 à 0,36 m

Relation entre H et L (formule de Blondel) : L + 2 H = 0,60 m à 0,64 m

EXEMPLE

Hauteur d'étage : 2,96 m avec deux volées.

Nombre de contremarches : $n = \frac{0,5 \times 2,96}{0,17} = 8,7$, soit $n = 9$

D'où : $H = \frac{1,48}{9} = 0,164$ m et $L = 0,62 - 2 \times H = 0,292$ m

6.2.2. Largeur des escaliers

Pour des raisons de circulations des personnes : minimum de 0,60 m.

Pour des établissements recevant du public (ERP) :

Nombre d'unités de passage (UP)	Nombre de personnes à évacuer	Largeur minimale
1	⩽ 100	0,80 m
2	⩽ 200	1,40 m
3	⩽ 300	1,80 m
4	⩽ 400	2,40 m

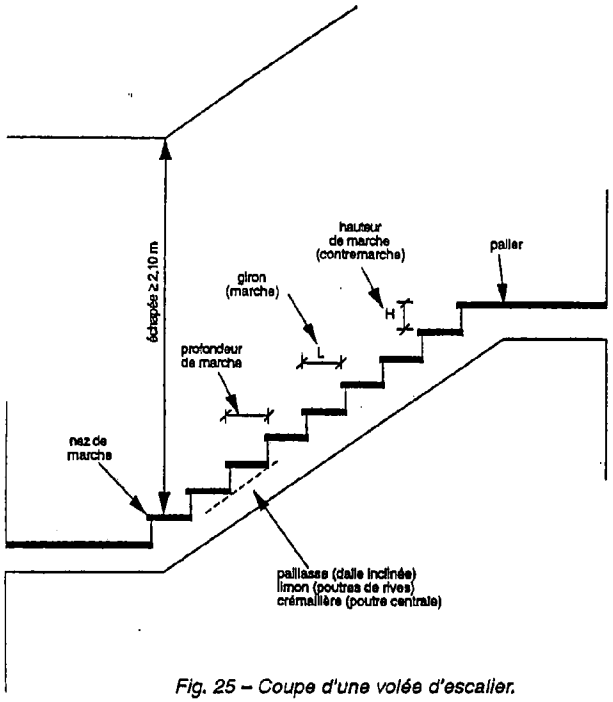


Fig. 25 – Coupe d'une volée d'escalier.

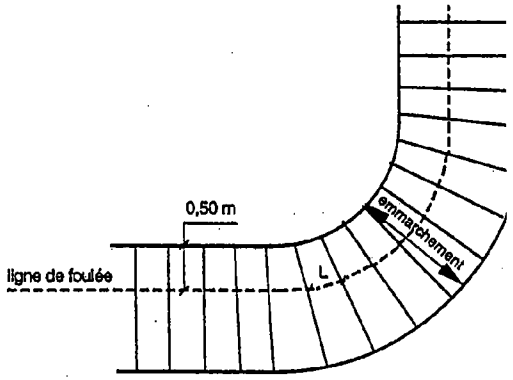


Fig. 26 – Escaliers circulaires normal et balancé.

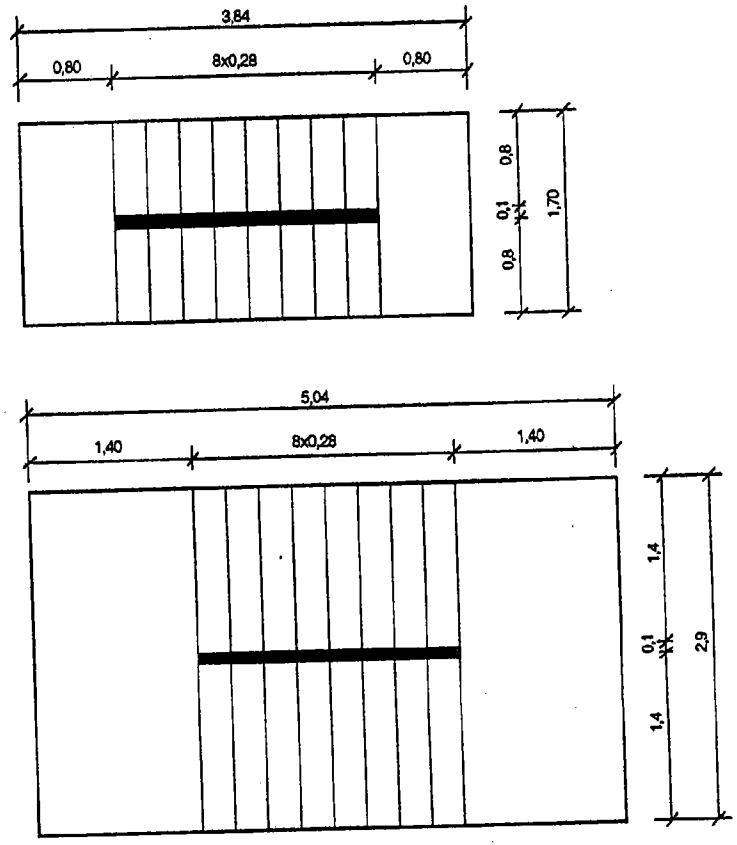


Fig. 27 – Escaliers à 2 et 3 unités de passage. Dimensions minimales.

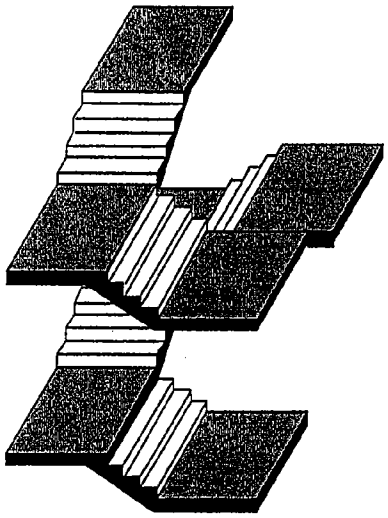


Fig. 28 – Escalier à 4 paillasses.

6.2.3. Charges d'exploitation

• Marches solidaires les unes des autres par une paillasse ou par les contremarches

La charge d'exploitation est celle qui figure dans la norme NF P 06-001 [1], pour les circulations, à savoir au moins la même que celle des locaux desservis et :

– 2,5 kN/m^2 pour les bâtiments d'habitation ;

– 4 kN/m^2 pour les locaux recevant du public ;

– 5 kN/m^2 pour les salles de spectacle, certaines salles d'exposition.

• Marches indépendantes

Pour les marches indépendantes d'escaliers en béton armé, appuyées à leur deux extrémités ou en porte-à-faux, la charge à prendre est :

– pour les escaliers ayant une largeur au plus égale à 1,10 m : 5,5 kN concentrée par marche dans la position la plus défavorable, sur une longueur de 0,10 m dans le sens de la portée (en extrémité de porte-à-faux pour une console) ;

– pour les escaliers de plus de 1,10 m de largeur : 10 kN par mètre de portée de la marche pour les escaliers non accessibles au public et 15 kN par mètre de portée pour les escaliers recevant du public.

Pour les escaliers métalliques, la charge sera donnée dans l'agrément technique de l'escalier et sera au plus égale aux valeurs ci-dessus.

6.3. CALCUL DES ESCALIERS

Suivant le type d'escalier, le calcul est effectué en flexion ou torsion (Fig. 29).

	Comme	Type de sollicitations	Les marches sont calculées comme
Paillasse	une dalle	à la flexion	simplement posées
Limon	une poutre	à la flexion	une dalle appuyée sur les deux limons
Crémaillère	une poutre	à la flexion et à la torsion	une dalle en porte-à-faux des deux côtés de la crémaillère
Console	dalle ou poutre	à la flexion	comme une dalle en porte-à-faux

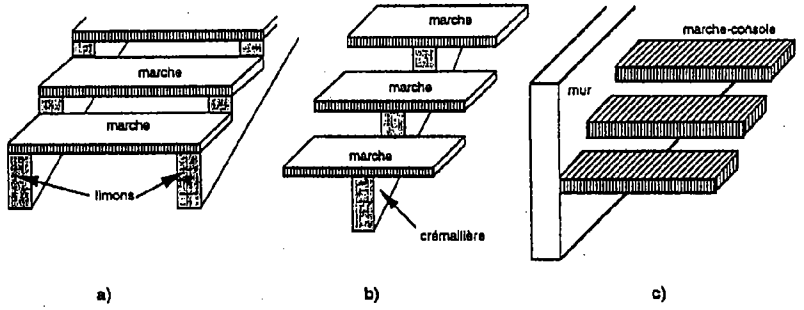


Fig. 29 – Types de fonctionnement des escaliers.

• Garde-corps, mains courantes

Pour les dimensions, voir en 2 ci-dessus norme NF P 01-012 [2].

6.4. ESCALIER EN BÉTON ARMÉ

Les escaliers droits se calculent comme une rampe en prenant en compte le poids des marches et contremarche (Fig. 30).

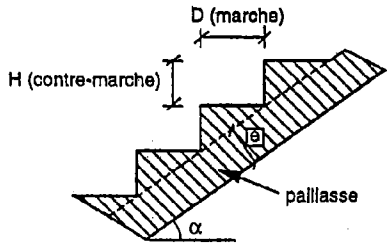


Fig. 30 – Escalier.

Pour le dimensionnement, on peut utiliser la règle $2H + D = 0,55$ à $0,65$ m. Par exemple : $D = 0,24$ m et $H = 0,17$ m.
Soient :

$\alpha = \text{Arctg}\left(\frac{H}{D}\right)$

g_1 = le poids propre : $g_1 = \varpi \left(\frac{e}{\cos \alpha} + \frac{H}{2}\right)$

g_2 = le revêtement sur marche (p_1 kN par m^2 horizontal), contremarche (p_2 kN par m^2 vertical) et en sous-face de la paillasse (p_3 kN par m^2 suivant la pente)

$g_2 = p_1 + p_2 \frac{H}{D} + \frac{p_3}{\cos \alpha}$ par m^2 horizontal

et q la charge d'exploitation par m^2 horizontal.

EXEMPLE (Fig. 31)

Charge d'exploitation $q = 4$ kN/m^2. Carrelage de 25 mm sur 15 mm de mortier sur marches et contremarches, 15 mm de plâtre en sous-face de la paillasse.

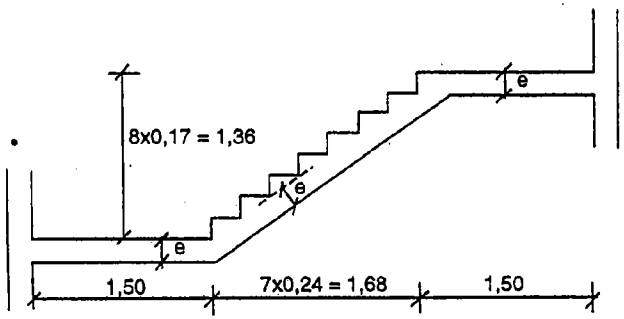


Fig. 31 – Exemple d'escalier.

Épaisseur : $e = 0,018 \sqrt[3]{25e + 4}$ d'où $e = 0,170$ m que l'on arrondira à 0,18 m pour prendre en compte le poids des revêtements.
Charges permanentes :

$$g_1 = \varpi \left(\frac{e}{\cos \alpha} + \frac{H}{2}\right) = 24,5 \left(\frac{0,18}{0,816} + \frac{0,17}{2}\right) = 7,487 \text{ kN/m}^2$$

$p_1 = 19,6 \text{ kN/m}^3 \times (0,025 + 0,015) \text{ m} = 0,784 \text{ kN/m}^2$
$p_2 = 0,784 \text{ kN/m}^2$
$p_3 = 12,75 \text{ kN/m}^3 \times 0,015 \text{ m} = 0,191 \text{ kN/m}^2$

$$g_2 = 0,784 + 0,784 \times \frac{0,17}{0,24} + \frac{0,191}{0,816} = 1,573 \text{ kN/m}^2$$

$g = g_1 + g_2 = 9,06$ kN/m2

Pour la zone de palier, on a $g_0 = 24,5 \times 0,18 + g_2 = 5,98$ kN/m^2
Le chargement peut être lu sur la figure 32.

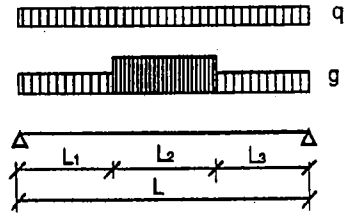


Fig. 32 – Charges.

Effort tranchant ELU, du fait de la symétrie des charges (tableaux cas 11 et 12 du chapitre 2) :

$V_u = 1,35 (g_0 L_1 + 0,5\, g\, L_2) = 1,35 (5,98 \times 1,5 + 0,5 \times 9,06 \times 1,68) = 21,02$ kN

Moment ELU

$$M_u = 1,35 \left(\frac{g_0 L^2}{2} + \frac{g L_2 (2L - L_2)}{8}\right) + 1,5 \frac{qL^2}{8}$$

$$= 1,35 \left(\frac{5,98 \times 1,5^2}{2} + \frac{9,06 \times 1,68 \times (2 \times 4,68 - 1,68)}{8}\right) + 1,5 \times \frac{4 \times 4,68^2}{8}$$

$$= 1,35 \times 21,34 + 1,5 \times 10,95 = 45,23 \text{ kNm}$$

Vérifications et aciers (Fig. 33)

Cisaillement :

$$\tau_u = \frac{V_u}{d} = \frac{21{,}02}{0{,}15} = 140 \text{ kPa} = 0{,}14 \text{ MPa} < 1{,}17 = \frac{0{,}07 f_{c28}}{1{,}5} \quad \textbf{OK.}$$

Contrainte de compression béton :

$$M_{ELS} = 21{,}34 + 10{,}95 = 32{,}29 \text{ kNm}$$

$$\beta = \frac{0{,}032\,29}{0{,}15^2} = 1{,}44 < 3 \quad \textbf{OK}$$

Aciers :

$$\mu = \frac{M_u}{d^2 \sigma_{bu}} = \frac{0{,}045\,23}{0{,}15^2 \times 14{,}17} = 0{,}142 < 0{,}37,$$

donc

$$\sigma_{su} = \frac{f_e}{1{,}15} = \frac{500}{1{,}15} = 435 \text{ MPa}$$

$$z = 0{,}5\, d\,(1 + \sqrt{1 - 2\mu}) = 0{,}5 \times 0{,}15 \times (1 + \sqrt{1 - 2 \times 0{,}142}) = 0{,}138\,5 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M_u}{z \sigma_{su}} = \frac{0{,}045\,23 \times 10^4 \times 1{,}15}{0{,}138\,5 \times 500} = 7{,}51 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \text{soit HA 12,} \quad s = 150 \text{ mm}$$

Acier transversal = $A_s / 4 = 1{,}88$ cm²/m , soit HA 8, $s = 250$ mm
Acier de chapeau = $0{,}15\, A_s = 1{,}13$ cm²/m , soit HA6, $s = 0{,}250$ mm

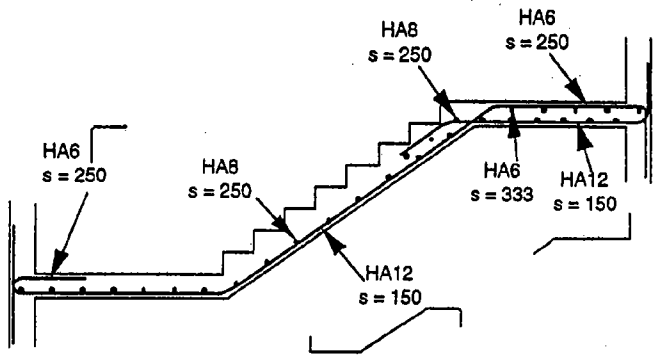


Fig. 33 – Escalier . Ferraillage.

6.5. ESCALIERS PRÉFABRIQUÉS EN BÉTON ARMÉ (Fig. 34)

Il est courant de préfabriquer les paillasses d'escaliers, plus rare l'ensemble paillasse-palier. On doit étudier avec soin le repos de la paillasse sur le palier coulé en place. De nombreux accidents ont été la conséquence d'une mauvaise disposition des aciers.

Les escaliers hélicoïdaux sont généralement préfabriqués (voir en 6.6 ci-après).

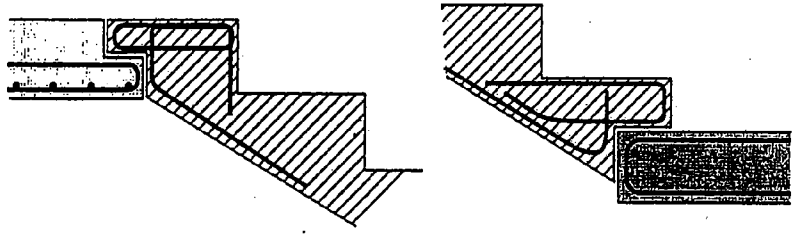


Fig. 34 – Exemple de ferraillage d'extrémités d'escalier préfabriqué.

6.6. ESCALIERS HÉLICOÏDAUX À MARCHES INDÉPENDANTES (Fig. 35)

6.6.1. Généralités

Ce type d'escalier convient pour des cages circulaires ou carrées. Les rayons courants vont de 1,00 m à 2,00 m. Le garde-corps peut être métallique et scellé en extrémité de marche ou en béton et préfabriqué en même temps que la marche.
Le noyau central creux est rempli de béton armé pour assurer la liaison entre les marches.

6.6.2. Exemple numérique (Fig. 35, 36, 37)

• Données

Largeur de passage : 1,00 m (il est rappelé qu'une unité de passage, pour évacuer moins de 100 personnes, doit avoir au moins 80 cm)
Hauteur d'étage : 2,55 m

Hauteur de contremarche : $\frac{2{,}55}{15} = 0{,}170$ m.

Charge de calcul : la portée de la marche est inférieure à 1,10 m, on prendra une charge concentrée de 5,5 kN à 10 cm de l'extrémité de marche pour la vérification d'une marche et 2,5 kN/m² pour le calcul d'ensemble.
Le noyau est supposé articulé dans le dallage et en tête (escalier de secours intérieur à un immeuble). Il a un diamètre de 30 cm extérieur et 18 cm intérieur.

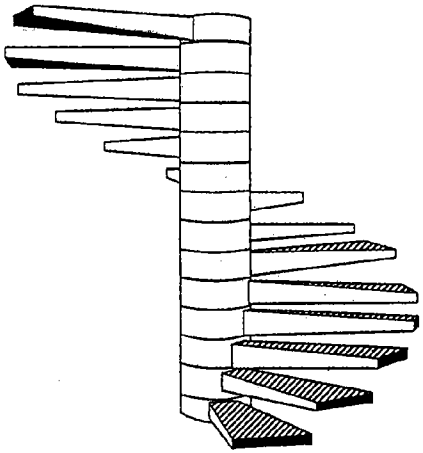


Fig. 35 – Escalier hélicoïdal circulaire à marches indépendantes préfabriquées..

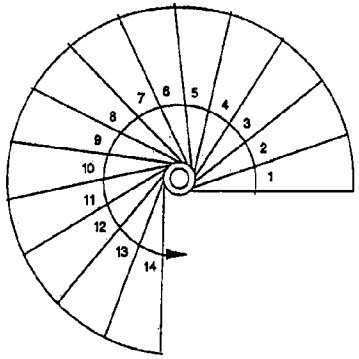


Fig. 36 – Escalier circulaire de 14 marches préfabriquées (soit 15 hauteurs de contremarche).

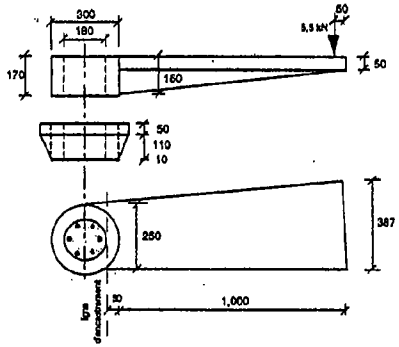


Fig. 37 – Escalier hélicoïdal . Marche isolée.

• **Marche isolée** (Fig. 37)

On prendra une portée de porte-à-faux de 1,05 m (du fait de la forme circulaire de l'appui dont la portée varie de 1,00 à 1,15 m) :

– poids propre : $G = 1{,}05\ \text{m} \dfrac{0{,}387 + 0{,}25}{2} \left(0{,}05 + \dfrac{0{,}16}{2}\right) \times 24{,}5\ \text{kN/m}^3 = 1{,}065\ \text{kN}$ à 0,60 m de l'encastrement et à 0,70 m de l'axe, d'où $M_g = 1{,}065 \times 0{,}60 = 0{,}635\ \text{kNm}$

– charge d'exploitation : $Q = 5{,}5\ \text{kN}$ à 5 cm de l'extrémité , soit $M_q = 5{,}5 \times 1 = 5{,}5\ \text{kNm}$

– moment ultime : $M_u = 1{,}35\ M_g + 1{,}5\ M_q = 9{,}11\ \text{kNm}$

– hauteur à l'encastrement : $h = 0{,}16\ \text{m}$

– hauteur utile : $d = 0{,}145\ \text{m}$ (avec un enrobage de 10 mm et un diamètre d'acier estimé égal à 10 mm)

– béton : $f_{c28} = 30\ \text{MPa}$ et $\sigma_{bu} = 17\ \text{MPa}$

– moment réduit : $\mu = \dfrac{M_u}{bd^2\sigma_{bu}} = \dfrac{0{,}009\ 11}{0{,}25 \times 0{,}14{,}5^2 \times 17} = 0{,}102 < 0{,}37$

– bras de levier : $z = 0{,}5\ d\ (1 + \sqrt{1 - 2\mu}\ ) = 0{,}137\ \text{m}$

acier en chapeaux (Fig. 38) : $A_s = \dfrac{M_u}{z\sigma_u} = \dfrac{0{,}009\ 11 \times 10^4 \times 1{,}15}{0{,}137 \times 500} = 1{,}53\ \text{cm}^2$ soit un cadre HA10 (= 1,57 cm²) autour du noyau.

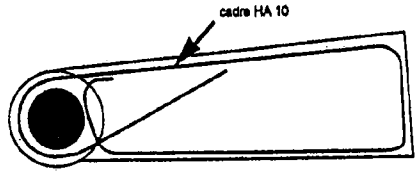


Fig. 38 – Ferraillage de la marche.

• **Noyau**

Pour chaque marche :

– poids propre compris noyau : $G = 1{,}065 + \pi \dfrac{0{,}3^2}{4} \times 0{,}17\ \text{m} \times 24{,}5\ \text{kN/m}^3 = 1{,}36\ \text{kN}$

– moment $M_g = 1{,}065\ \text{kN} \times 0{,}7\ \text{m} = 0{,}746\ \text{kNm}$

– aire horizontale de la charge d'exploitation (3/4 de cercle pour 14 marches) :

$$S = \frac{3}{4}\,\frac{\pi(1{,}15^2 - 0{,}15^2)}{14} = 0{,}218\ 8\ \text{m}^2$$

– charge d'exploitation par marche : $Q = 0{,}218\ 8 \times 2{,}5\ \text{kN/m}^2 = 0{,}547\ \text{kN}$ (bureaux) dont le centre de gravité est à 0,70 m de l'axe du noyau
– moment $M_q = 0{,}547 \times 0{,}7 = 0{,}383\ \text{kNm}$
– moment ELU : $M_u = 1{,}35\ M_g + 1{,}5\ M_q = 1{,}582\ \text{kNm}$
– charge verticale ELU : $P_u = 1{,}35\ G + 1{,}5\ Q = 2{,}657\ \text{kN}$.

Le noyau résistant a un diamètre extérieur de 0,18 m, compte tenu de l'épaisseur des parois du collier préfabriqué de la marche de 6 cm (0,30 m – 2 × 0,06 = 0,18 m).

Les moments concentrés appliqués au noyau par chaque marche se répartissent suivant le cas de charge 22 du chapitre 2.

D'où le tableau suivant montrant que la section la plus sollicitée en flexion composée n'est pas la plus basse. On calcule le moment résistant M_R de la section avec le programme « FLEXCOMP » avec un enrobage à l'axe de 20 mm dont 10 mm pour l'enrobage au nu (protégé des intempéries), un diamètre estimé de 8 mm pour les aciers longitudinaux et un diamètre de cadre (cerce) de 6 mm.

Rayon R = 0,70 m (point d'application de la résultante des charges).
Moment ELU pour une marche : $M_u = 1{,}552\ \text{kNm}$
Charge ELU (concourante avec M_u) : $P_u = 2{,}657\ \text{kN}$
Nombre de marches : n = 14

Angle entre deux marches successives : $\alpha = \frac{270°}{14} = 19°{,}286$

i	φ deg	x m	y m	z m	M_x kNm	M_y kNm	M kNm	P kN	M_R kNm
	$(i-1)\alpha$	R cosφ	R sinφ	0,17 i	$\sum_{i=1}^{1} M_u \cos\varphi$	$\sum_{i=1}^{1} M_u \sin\varphi$	$\sqrt{M_x^2+M_y^2}$	$(n-i+1)P_u$	«FLEXCOMP»
14	251	–0,231	–0,661	2,380	–0,522	–1,493	1,582	2,657	-
13	231	–0,436	–0,547	2,210	–1,509	–2,730	3,008	5,314	-
12	212	–0,593	–0,372	2,040	–2,848	–3,572	4,243	7,971	-
11	193	–0,682	–0,156	1,870	–4,391	–3,924	5,261	10,628	-
10	174	–0,696	0,078	1,700	–5,963	–3,747	6,047	13,285	8,21
9	154	–0,631	0,304	1,530	–7,388	–3,060	6,597	15,942	8,32
8	135	–0,495	0,495	1,360	–8,507	–1,942	6,919	18,599	8,43

i	φ deg	x m	y m	z m	M_x kNm	M_y kNm	M kNm	P kN	M_R kNm
7	116	–0,304	0,631	1,190	–9,193	–0,516	7,034	21,256	8,55
6	96	–0,078	0,696	1,020	–9,370	1,056	6,970	23,913	8,66
5	77	0,156	0,682	0,850	–9,018	2,598	6,697	26,570	8,77
4	58	0,372	0,593	0,680	–8,177	3,938	6,197	29,227	8,87
3	39	0,547	0,436	0,510	–6,940	4,924	5,463	31,884	8,98
2	19	0,661	0,231	0,340	–5,446	5,446	4,503	34,541	9,09
1	0	0,700	0,000	0,170	–3,864	5,446	3,339	37,198	9,19

Six armatures HA8 suffisent pour armer le noyau.

Remarque
Nous avons fait l'hypothèse que le seul noyau coulé en place reprenait les sollicitations extérieures. En fait, la partie de béton des disques préfabriqués jouent un rôle à la compression, mais non à la traction et augmentent d'autant le bras de levier. Pour la même raison, le risque de flambement est diminué.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Norme NF P 06-001 – Base de calculs des constructions. Charges d'exploitation des bâtiments.

[2] Norme NF P 01-012 – Dimensions des garde-corps. Règles de sécurité relatives aux dimensions des garde-corps et rampes d'escalier.

[3] H. THONIER – Le Projet de béton armé, SEBTP, 1991.

[4] Réglementation des ERP (Etablissements recevant du public) de 1980.

[5] Code du travail, article R235-4-7 (31 mars 1993).

[6] Norme AFNOR NF P 21-211 – Escaliers en bois, spécifications.

[7] DTU 21 – Additif n° 1 – Prescriptions particulières applicables aux marches préfabriquées, indépendantes en béton armé pour escaliers (AFNOR P 18-201).

[8] DTU 31.1 – Charpentes et escaliers en bois (AFNOR NF P 21-203).

[9] DU 21.3 – Dalles et volées d'escaliers préfabriqués en béton armé simplement posés sur appui sensiblement horizontaux (AFNOR P 19-201).

[10] Norme AFNOR NF P 01-0,12 – Escaliers droits en maçonnerie.

14. ÉTUDE D'UN BÂTIMENT

1. DÉFINITION DU PROJET

1.1. DONNÉES ARCHITECTURALES

L'étude d'un bâtiment (ou de toute structure en béton armé) se fait en plusieurs étapes :
- dimensionnement des éléments de la structure : dalles, planchers, poutres, poteaux, voiles, fondations,... au stade de la conception pour permettre au maître d'œuvre (l'architecte) de s'assurer que son projet est réaliste et que les dimensions prévues ne sont pas susceptibles d'être modifiées de façon notable lors de l'exécution ;
- dimensionnement ou vérification du dimensionnement précédent, au stade du chiffrage par l'entreprise des quantités de béton, coffrage et aciers ;
- justification des dimensions retenues et réalisation des plans de coffrage et de ferraillage qui permettront la réalisation de l'ouvrage.

Le temps disponible pour la deuxième étape étant de quelques semaines contre quelques mois pour la troisième, les méthodes utilisées ne sont pas les mêmes. C'est pourquoi, nous distinguerons dans ce qui suit les études d'avant-projet et les études d'exécution.

Nous ne parlerons pas ici du métré réalisé lors de l'étude de prix en vue d'une offre par l'entreprise, qui est une détermination *a priori* des quantités de béton, coffrage et aciers et qui est traité dans la quatrième partie du *Projet de béton armé* [1].

Il est rappelé qu'un plan de coffrage représente la vue *par dessus* du coffrage d'un élément, *avant coulage* du béton et non, comme il est dit couramment, une vue par dessous de l'élément coulé.

Les plans de ferraillage doivent permettre de couper, façonner, assembler et mettre dans les coffrages toutes les armatures nécessaires à l'exception des écarteurs, diagonales de contreventement des cages d'armatures et chaises d'appui. Ces plans comportent généralement une nomenclature des aciers indiquant, pour chaque barre, le numéro d'ordre,

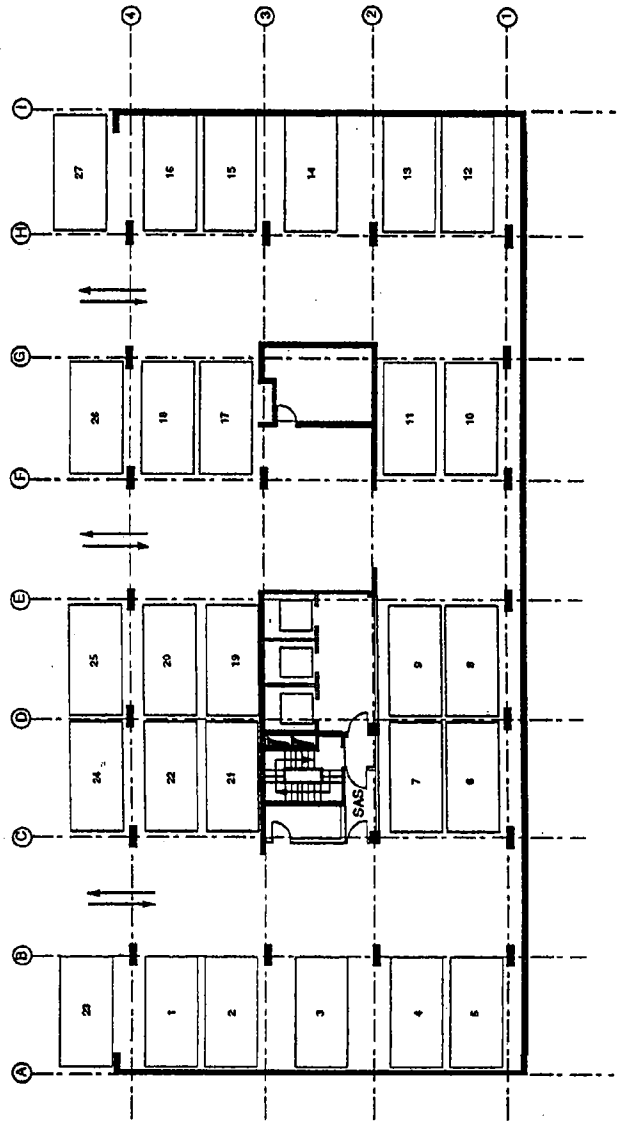


Fig. 1 – Plan du sous-sol.

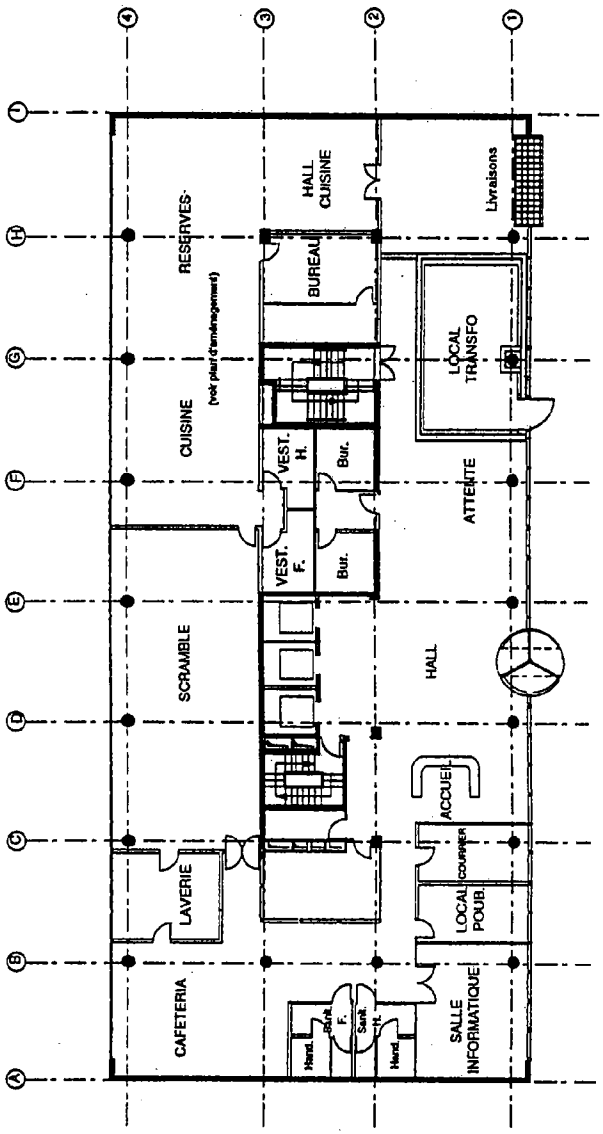


Fig. 2 – Plan du rez-de-chaussée.

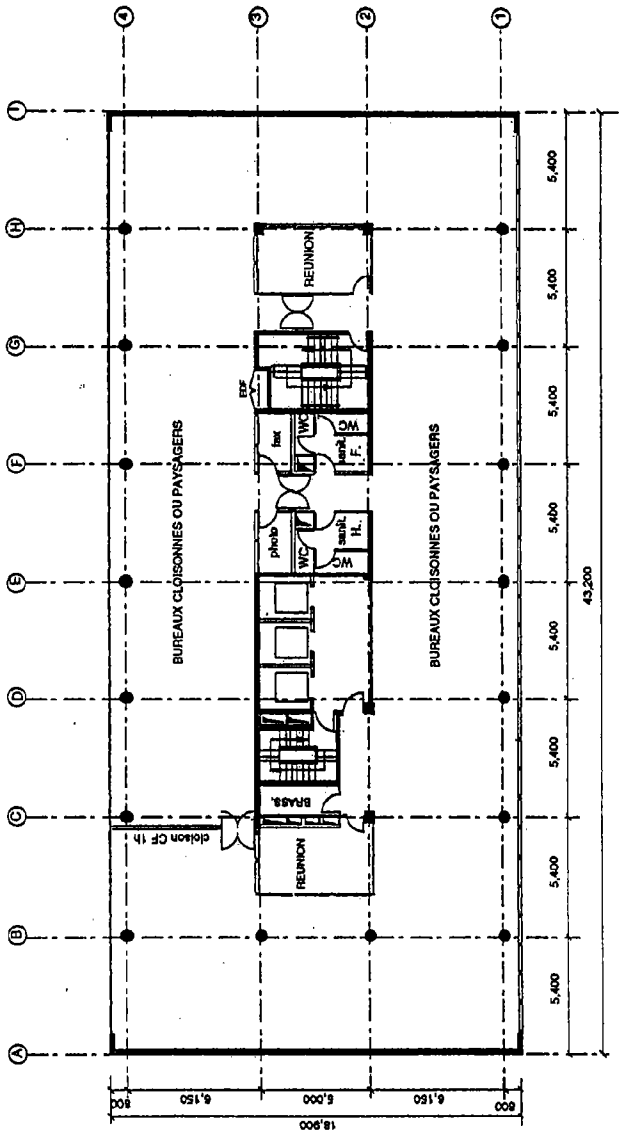


Fig. 3 – Plan de l'étage courant.

la longueur de coupe, les dimensions des différentes parties droites ou courbes, le diamètre, la nature de l'acier.

Nous nous proposons de faire l'étude d'un bâtiment courant de bureaux avec pour mission :
- d'assurer le conseil du maître d'œuvre pour le dimensionnement de la structure ;
- de faire les calculs de la structure en vue de la réalisation des plans de coffrage et de ferraillage.

Le bâtiment est rectangulaire de 43,20 m par 18,90 m, situé en région parisienne. Il comporte 9 niveaux sur rez-de-chaussée et 3 sous-sols de parkings.

Les plans d'architecte des sous-sol, rez-de-chaussée et étage courant sont représentés sur les figures 1, 2 et 3, la coupe verticale sur la figure 4.

On remarquera que les cloisonnements des bureaux de l'étage courant ne sont pas précisés. Suivant la norme NF P 06-001, on prendra alors comme charge d'exploitation, le maximum de :
- 3,5 kN/m^2 pour des bureaux paysagers ;
- 2,5 kN/m^2 pour les bureaux courants + 1 kN/m^2 de cloisons légères de poids inférieur à 2,5 kN/m, (soit 1 kN par m^2 de cloison) ; ces conditions conduisent à $q = 3{,}5$ kN/m^2.

La rampe d'accès aux parkings en sous-sol est située dans le jardin arrière du bâtiment et ne figure pas sur les plans.

Les façades sont du type façade légère et pèsent : 1,3 kN/m.
Le revêtement de sol des bureaux a un poids de 0,1 kN/m^2 (moquette ou dalles thermoplastiques) collé sur un ragréage de 15 mm.
Le revêtement de sol du rez-de-chaussée et des sanitaires est constitué d'un carrelage de 20 mm d'épaisseur posé sur 40 mm de chape en ciment.
Le local informatique du rez-de-chaussée est revêtu de moquette.

Dimension en m		Étage courant	Rez-de-chaussée	Sous-sols
Hauteur d'étage	h_0	3,10	3,60	2,60
Hauteur libre sous plafond	h_1	2,60	3,05	2,10
Épaisseur du revêtement lourd (20 mm de carrelage et 40 mm de chape)	h_2	0,06	0,06	-
Épaisseur faux-plafond	h_3	0,04	0,04	-
Hauteur limite des poutres $h_0 - h_1 - h_2 - h_3 =$	h_4	0,40	0,45	0,60
Épaisseur revêtement léger		$\leq$ 0,01	0,02	-
Épaisseur chape ou ragréage		0,015	0,015	-

Remarque
Bien que les habitudes en France soient de coter en cm, nous utiliserons les mm, conformément aux normes françaises [3] [4] [5] [6] et aux habitudes internationales.

1.2. DONNÉES TECHNIQUES

1.2.1. Hypothèses de base

Règlements de calcul	
Béton armé	BAEL 91
Charges d'exploitation	NF P 06-001 (*)
Action de la neige	N 84
Action du vent	NV 65

(*) à défaut de données particulières dans les pièces du marché.

Résistance caractéristique du béton	$f_{c28} = 25$ MPa
Limite élastique des aciers	$f_e = 500$ MPa
Contrainte limite de calcul du sol à 1 m au-dessous du dallage	$q_u = 1{,}4$ MPa
Contrainte de calcul du béton à l'ELU	$\sigma_{bu} = \dfrac{0{,}85\, f_{c28}}{1{,}5} = 14{,}17$ MPa
Contrainte de calcul de l'acier à l'ELU	$\sigma_{su} = \dfrac{f_e}{1{,}15} = 434{,}8$ MPa
Longueur de recouvrement des aciers	$L_d = 45$ diamètres
Fissuration	peu préjudiciable, à l'exception des faces extérieures des voiles de pignon
Enrobage des aciers	15 mm (valeur recommandée, bien que le minimum réglementaire soit de 10 mm), à l'exception des faces extérieures des voiles de pignon : 30 mm

1.2.2. Charges permanentes (voir tome 1, chapitre 3, § 1)

Charges permanentes	Poids volumique (kN/m³)	Épaisseurs (m)	Charges (kN/m²)
Béton armé	24,5	variable	-
Chape de mortier	19,6	-	-
Plâtre	13,0	-	-
Carrelage	19,6	0,02	0,392
Faux-plafond	-	-	0,200
Moquette	-	-	0,100
Façade légère	-	-	1,3 kN/m

1.2.3. Charges d'exploitation

Locaux	kN/m²
Bureaux paysagers, informatique	3,5
Bureaux avec cloisonnement léger inclus	3,5
Cafétéria, scramble	4,0
Cuisine et réserves	3,5
Escaliers	3,5
Hall du rez-de-chaussée	4,0
Local poubelle	4,0
Parkings	2,5
Local transformateur, livraisons	10,0

1.2.4. Neige

Région B : $q_n = 0{,}55$ kN/m²

1.2.5. Vent

Région I : $q_{vn} = 0{,}5$ kN/m²

1.3. CHARGES DE PLANCHER

Pour le dimensionnement d'avant-projet, on admet de prendre une charge non pondérée $g + q$ (charges permanentes + charges d'exploitation) égale à :

– 9 kN/m² pour les terrasses ;

– 8 kN/m² pour les étages courants ;

– 7 kN/m² pour les parkings et sous-sols.

Pour l'étude d'exécution, nous prendrons les valeurs du tableau suivant.

Type n°	Nature du plancher	Description	Épais. (m)	Poids volumique (kN/m³)	Poids (kN/m²)
1	toiture-terrasse	– gravillons de protection d'étanchéité	0,04	19,6	0,784
		– étanchéité	0,01	-	0,120
		– forme de pente (*)	0,10	19,6	1,960
		– isolation thermique	0,12	0,4	0,048
		– dalle béton armé	0,14	24,5	3,430
		– faux-plafond	-	-	0,200
				Total =	6,542
2	étage courant bureau	– moquette	-	-	0,100
		– ragréage	0,015	19,6	0,294
		– dalle béton armé	0,14	24,5	3,430
		– faux-plafond	-	-	0,200
				Total =	4,024
3	sanitaires cuisine cafétéria	– carrelage	0,02	19,6	0,392
		– chape ciment	0,04	19,6	0,784
		– dalle béton armé	0,14	24,5	3,430
		– faux-plafond	-	-	0,200
				Total =	4,806
4	parkings	– dalle béton armé	0,14	24,5	3,430
		– tuyauteries, ...	-	-	0,200
				Total =	3,630

(*) La pente est au minimum de 1% le long de la ligne de plus grande pente. La plus grande longueur, le long de la ligne de plus grande pente, est de 9 m. L'épaisseur minimale de la forme de pente est de 4 cm pour des raisons de résistance à la fissuration. L'épaisseur moyenne est égale à $4 + \frac{2}{3} \times 9 = 10$ cm. On admet d'appliquer l'épaisseur moyenne au calcul de l'ensemble du plancher.

Les charges permanentes et les charges d'exploitation du rez-de-chaussée étant très variables suivant la nature des locaux, l'étude en sera détaillée lors de l'étude d'exécution (voir en 3 ci-après).

2. DIMENSIONNEMENT

Avant de procéder à la descente de charges permettant le dimensionnement des fondations qui sont les premiers éléments construits, il convient de dimensionner les étages dans l'ordre décroissant en partant du sommet du bâtiment :
– les dalles et planchers ;
– les poutres ;
– les poteaux et voiles.

Ces dimensionnements sont effectués au stade de l'avant-projet, corrigés éventuellement au moment des études d'exécution.

2.1. VÉRIFICATION DES POINTS PORTEURS AUX CROISEMENTS DES AXES

Une des premières vérifications consiste à s'assurer que les poteaux « plombent », c'est-à-dire qu'ils ne sont pas interrompus à un étage donné en descendant.

Si ce n'est pas le cas :
– voir avec le concepteur (l'architecte ou le maître d'œuvre) s'il n'est pas possible de rétablir le poteau ou un élément de voile ;
– sinon, il faudra reprendre la charge par une « poutre de reprise » portant de poteau à poteau. Cette disposition est vivement déconseillée pour un calcul parasismique et pas très satisfaisante dans les autres cas.

Il peut arriver, dans des cas particuliers, que l'aménagement du rez-de-chaussée ne s'accomode pas des dispositions des étages et conduise à une implantation de poteaux en rez-de-chaussée (RdC) différente de celle des étages. On prévoit alors un plancher de reprise consistant en une dalle épaisse (0,50 m à 1 m d'épaisseur), jouant un rôle de répartition des charges sur les nouveaux appuis. On peut retrouver ce cas de figure entre le rez-de-chaussée et le sous-sol (places de parking et aires de circulation des véhicules).

Dans notre exemple, les poteaux et voiles sont pratiquement identiques de haut en bas. Le changement de forme des poteaux, de circulaires en rectangulaires, peut être opéré dans l'épaisseur d'un plancher entre dessus de plancher et dessus de faux-plafond, soit sur 0,4 m de hauteur, ce qui autorise une variation de 0,40 m horizontalement en admettant un épanouissement à 45° des efforts.

L'architecte souhaite avoir les mêmes dimensions pour les poteaux du rez-de-chaussée au 9e étage. Nous pourrons dimensionner les poteaux au 2e étage et avoir les mêmes dimensions au rez-de-chaussée moyennant une légère augmentation des aciers.

2.2. VÉRIFICATION DE LA STRUCTURE DE CONTREVENTEMENT

Pour que la résistance du bâtiment au vent (et au séisme) puisse être assurée, il faut que les éléments résistants, des voiles en général, puissent répercuter aux étages inférieurs et aux fondations, les efforts dus aux charges gravitaires verticales et les moments de renversement.

On évitera dans la mesure du possible les changements importants d'inertie d'un étage à l'autre. On évitera également les diminutions d'inerties des voiles en descendant, car les parties de voiles ne « descendant » pas sont généralement inutilisables, du point de vue de la résistance.

Pour un immeuble de moins de 12 étages, on prendra une épaisseur de voile comprise entre 0,15 et 0,20 m.

Si ce n'est pas le cas :

- essayer d'épaissir les voiles inférieurs de façon que leurs moments d'inertie soient au moins égaux à ceux des étages situés au-dessus ;
- créer des voiles ailleurs de façon qu'une partie des efforts horizontaux leur soit transmise par l'intermédiaire des planchers.

Dans notre exemple, les voiles sont pratiquement identiques de haut en bas. Seuls quelques éléments de voiles disparaissent au rez-de-chaussée et en sous-sol. Nous ne les prendrons pas en compte pour le calcul du contreventement. Les voiles ont 0,20 m d'épaisseur (Fig. 11).

L'action du vent s'exerce depuis le niveau du sol jusqu'au PH9 (Fig. 4 et 5).

On peut, au stade de l'avant-projet et par simplification, prendre la valeur au sommet constante sur toute la hauteur hors sol. Pour les études d'exécution, on calculera la valeur de la pression du vent au niveau du plancher haut de chaque étage (Fig. 5).

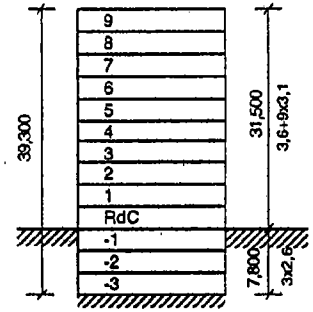


Fig. 4 – Coupe verticale.

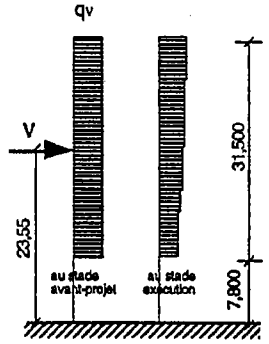


Fig. 5 – Résultante de vent.

2.3. DALLES

2.3.1. Etudes d'avant-projet

Épaisseur h d'une dalle en fonction de la portée L	Dalle d'une travée portant dans une direction	Dalle d'une travée portant dans deux directions (*)	Travée de rive d'une dalle continue dans une direction	Travée de rive d'une dalle continue dans deux directions (*)
Faible charge et petite portée	h = L / 25	h = L / 35	h = L / 33	h = L / 45
Forte charge et grande portée	h = L / 20	h = L / 30	h = L / 25	h = L / 40

(*) $L = \sqrt{L_1 L_2}$

Soit pour une travée de rive de dalle continue dans une direction :

- de portée L = 5,40 m : $h = \frac{5,4}{30} = 0,18$ m ;

- de portée L = 6,15 m : $h = \frac{6,15}{30} = 0,21$ m.

Pour un panneau d'angle d'une dalle portant dans deux directions de portées 5,40 m et 6,15 m : $L = \sqrt{5,4 \times 6,15} = 5,76$ m et $h = \frac{5,76}{40} = 0,145$ m (soit 0,14 m ou 0,15 m).

Remarque

Une augmentation d'épaisseur d'une dalle n'a pas de conséquences économiques importantes, car ce que l'on perd en béton, on le gagne en acier du fait de l'augmentation du bras de levier.

2.3.2. Études d'exécution

Pour la détermination de l'épaisseur h d'une dalle de portée entre axes L, on peut utiliser la formule suivante : $h = 0,016 \cdot L \sqrt[3]{25h + q'}$ pour une travée de rive de dalle continue, où q' représente l'ensemble des charges non pondérées autres que le poids propre.

Type de plancher	Charges permanentes			Charges d'exploitation	Charges de calcul
(voir tableau en § 1.3 ci-dessus)	Poids propre g_0	autre que poids propre	totales g_1	q	$q' = g_1 + q$
1	3,430	3,112	6,542	1,0	4,112
2	3,430	0,594	4,024	3,5	4,094

Sauf cas particuliers (local transfo, ...), nous pouvons retenir une charge $q' = 4{,}1$ kN/m².

On pourra adopter trois types de plancher possible :
- plancher-dalle sans retombée avec comme inconvénients : calculs compliqués, mise en œuvre difficile et coûteuse, dalle épaisse, donc lourde avec conséquences sur le dimensionnement des poteaux et fondations ;
- dalle portant dans une ou deux directions :

Poutraison	Avantages	Inconvénients
Poutres parallèles aux axes A, B, C, ...	Portée entre axes dalle : L = 5,40 $h = 0{,}016L\sqrt[3]{25h + 4{,}1} = 0{,}18$ m Pas de poutre le long de la façade Pas de poutre pour le porte-à-faux de 0,80 m	
Poutres parallèles aux axes 1, 2, 3, ...	La dalle est en continuité avec la dalle centrale lorsqu'elle existe	Portée entre axes dalle : L = 6,15 $h = 0{,}016L\sqrt[3]{25h + 4{,}1} = 0{,}21$ m Dalle plus épaisse
Poutres croisées suivant les axes A,B, C, ... et 1, 2, 3, ...	Dalle d'épaisseur réduite : $h = 0{,}18\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{5{,}4}{6{,}15}\right)^2\right)^{0{,}333} = 0{,}14$	Deux systèmes de poutres

Voir [1], p. 231.

Nous retiendrons la solution des poutres-croisées, car nous diminuerons le poids de la dalle (épaisseur h = 0,14 m) et la retombée des poutres.

2.4. POUTRES

2.4.1. Études d'avant-projet

Dimensionnement des poutres	Poutres sur appuis simples		Poutres continues travées intérieures		Poutres continues travées de rive	
	Faibles charges et petites portées	Fortes charges et grandes portées	Faibles charges et petites portées	Fortes charges et grandes portées	Faibles charges et petites portées	Fortes charges et grandes portées
Hauteur totale h	L / 16	L / 10	L / 18	L / 15	L / 16	L / 12
Largeur b d'une section rectangulaire	0,3 h à 0,6 h					
Largeur b_0 d'une section en Té	0,2 h à 0,4 h					

Pour une poutre continue, on pourra prendre $L = \sqrt[n]{L_1 L_2 L_3 \ldots L_n}$.
Dans notre exemple de portée moyenne et charge moyenne :

- travée de rive d'une poutre continue de portée entre axes L = 5,40 m, axes 1 et 4 (moins chargées) :

$$h = \frac{L}{15} = \frac{5{,}40}{15} = 0{,}36 \text{ m}$$

$b_0 = 0{,}5\ h = 0{,}18$ m

Pour des raisons de bonne exécution et de mise en place du ferraillage, on prendra

$b_0 = 0{,}20$ m pour $h = 0{,}35$ m ;

- travée de rive d'une poutre continue de portée entre axes L = 5,40 m, axes 2 et 3 (plus chargées) :

$$h = \frac{L}{13} = \frac{5{,}40}{13} = 0{,}415 \text{ m}$$

$b_0 = 0{,}5$ h = 0,20 m ; on retiendra $b_0 = 0{,}20$ m et $h = 0{,}40$ m ;

- poutres des axes B, C, D, ... de portée 6,15 ; 5,00 m ; 6,15 m avec deux porte-à-faux de 0,80 m ; la poutre de rive a une portée moyenne $L = \sqrt{6{,}15 \times 5} = 5{,}55$ m, d'où : $h = L / 14 = 0{,}396$ m ; nous retiendrons $b_0 = 0{,}20$ m et $h = 0{,}40$ m en prenant en compte le fait que la dalle porte dans deux directions.

2.4.2. Études d'exécution

a) Dimensionnement des poutres des axes 1 et 4

Les poteaux ont les dimensions déterminées en 2.5.1 ci-après.

Pour un poteau circulaire, on peut considérer le nu de l'appui d'une poutre au nu du poteau carré de même surface, par exemple : Ø 450 = poteau carré de 0,4 × 0,4, d'où la portée : L = 5,4 – 0,4 = 5,0 m.

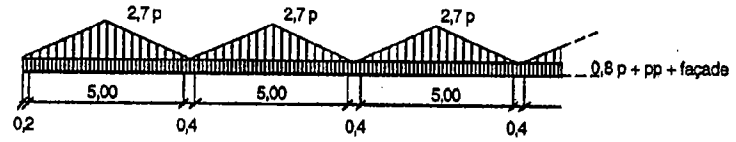


Fig. 6 – Chargement des poutres axes 1 et 4.

Le dimensionnement se fera en ELS avec $p = g + q = 4,094 + 3,5 = 7,594$ kN/m².

Moment isostatique d'un chargement triangulaire (Fig. 6) :

$$M_o = \frac{2}{3} \times 2,7 \frac{pL^2}{8} = \frac{2}{3} \times 2,7 \times \frac{7,594 \times 5^2}{8} = 42,72 \text{ kNm}$$

Moment dû au poids propre, au porte-à-faux et à la façade :

$$M_o = (0,2 \times 0,21 \times 24,5 + 0,8 \times 7,594 + 1,3) \frac{5^2}{8} = 26,36 \text{ kNm}$$

Moment de dimensionnement en continuité :

$$0,8\, M_o = 0,8 \times (42,72 + 26,36) = 55,2 \text{ kNm.}$$

Avec $\beta = 2,8$ (plus économique que la valeur limite 3,2) : $55,2 \times 10^{-3} = 2,8\, b\, d^2$.
Prenons une largeur de 0,20 m, on trouve : $d = 0,31$, soit $h = 0,35$ m (Fig. 7).

Remarque

En toute rigueur, la charge est triangulaire à partir des axes des appuis et non des nus d'appui. Les valeurs calculées ci-dessus sont légèrement en-dessous de la réalité, mais de si peu que l'on peut négliger l'approximation faite à ce stade.

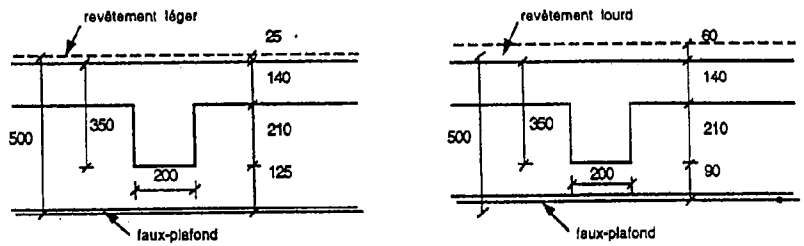


Fig. 7 – Dimensions des poutres axes 1 et 4.

b) Dimensionnement des poutres des axes 2 et 3

Pour un poteau circulaire, on peut considérer le nu de l'appui d'une poutre au nu du poteau carré de même surface : Ø 550 = poteau carré de 0,5 × 0,5 d'où la portée
L = 5,4 – 0,5 = 4,90 m.

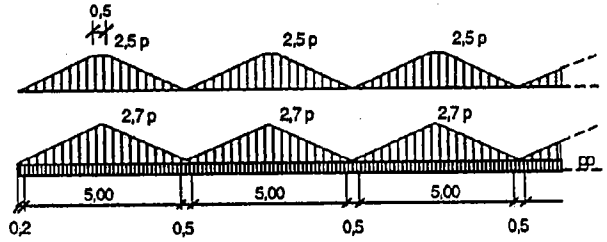


Fig. 8 – Chargement des poutres axes 2 et 3.

Moment isostatique d'un chargement triangulaire (Fig. 8) :

$$M_o = \frac{2}{3} \times 2,7 \frac{pL^2}{8} = \frac{2}{3} \times 2,7 \times \frac{7,594 \times 4,9^2}{8} = 41,02 \text{ kNm}$$

Moment isostatique d'un chargement trapézoïdal (coefficient 0,71 pour un rapport 2,5/5,4 ; voir p.212 de [1]) :

$$M_o = 0,71 \times 2,5 \frac{pL^2}{8} = 0,71 \times 2,5 \times \frac{7,594 \times 4,9^2}{8} = 40,95 \text{ kNm}$$

Moment dû au poids propre :

$$M_o = 0,2 \times 0,26 \times 24,5 \frac{4,9^2}{8} = 3,82 \text{ kNm}$$

Moment de dimensionnement en continuité :

$$0{,}8\ M_o = 0{,}8 \times (41{,}02 + 40{,}45 + 3{,}82) = 68{,}23\ \text{kNm}$$

Avec $\beta = 2{,}8$ (plus économique que la valeur limite 3,2) : $68{,}23 \times 10^{-3} = 2{,}8 \times 0{,}2\ d^2$ avec la même largeur de 0,20 m, on trouve : $d = 0{,}35$, soit $h = 0{,}40$ m (Fig. 9).

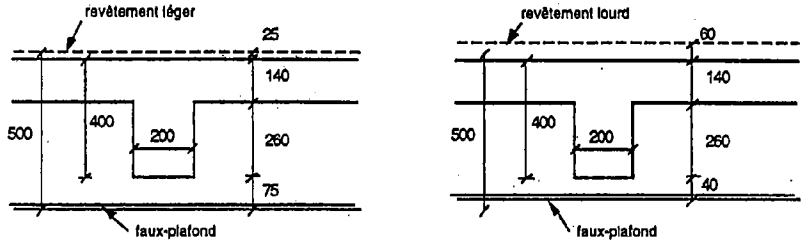


Fig. 9 – Dimensions des poutres axes 2 et 3.

Remarque

Les poutres des axes 2 et 3 situées entre les axes C et G ne sont pas en continuité, mais le moment étant positif, la table de compression est très suffisante pour reprendre M_o au lieu de $0{,}8\ M_o$.

c) Dimensionnement des poutres des axes B, C, D, ...

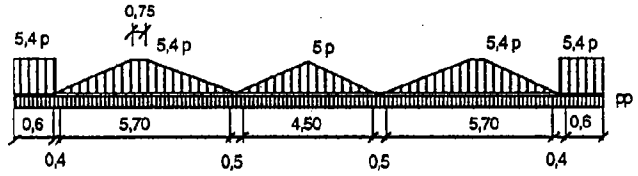


Fig. 10 – Chargement des poutres axes B, C, D, ...

Rotation équivalente d'une charge trapézoïdale pour le calcul d'un moment sur appui (voir p.212 de [1]) :

– pour $\frac{a}{L} = \frac{2{,}7}{6{,}15} = 0{,}439 \rightarrow k = 0{,}70$;

– pour $\frac{a}{L} = \frac{2}{5} = 0{,}5 \rightarrow \quad k = 0{,}625$.

Equation des 3 moments : $L_1 M_1 + 2 (L_1 + L_2) M_2 + L_2 M_3 = 6EI (\omega_g - \omega_d)$

avec : $p = 7{,}594$ kN/m

$L_1 = 5{,}70$ m

$L_2 = 4{,}50$ m

$M_1 = -5{,}4\ p \times 0{,}6^2 / 2 = -7{,}38$ kNm

$M_3 = M_2$

$$6\ EI\ \omega_g = -6\ (0{,}7 \times 5{,}4 \times 7{,}594) \times \frac{5{,}7^3}{24} = -1329{,}0$$

$$6\ EI\ \omega_d = 6\ (0{,}625 \times 5 \times 7{,}594) \times \frac{4{,}5^3}{24} = 540{,}6$$

d'où : $-5{,}7 \times 7{,}38 + (2 \times 5{,}7 + 3 \times 4{,}5)\ M_2 = -1329 - 540{,}6$

$M_2 = M_3 = -73{,}40$ kNm.

Avec $\beta = 2{,}8$ et $b_o = 0{,}2$ m : $M_2 = 2{,}8\ b_o\ d^2$ et $d = \sqrt{\frac{73{,}4 \times 10^{-3}}{2{,}8 \times 0{,}2}} = 0{,}362$ m

Nous retiendrons : $b_o = 0{,}20$ et $h = 0{,}40$ m (Mêmes dimensions que sur la figure 9).

Le plan de dimensionnement du plancher est représenté sur la figure 11.

2.5. POTEAUX

2.5.1. Études d'avant-projet

Charges permanentes + charges d'exploitation g + q au m² de plancher	Faibles charges d'exploitation ≤ 1,5 kN/m² petites portées	Fortes charges d'exploitation grandes portées
g + q des planchers	6	9
g poteaux	1	1
Total	7	10

Remarque

Une toiture-terrasse comporte en général une forme de pente, une étanchéité et une protection d'étanchéité mais une charge d'exploitation faible (1 kN/m² pour une terrasse privée). La charge totale $g + q$ est pratiquement la même que celle d'un plancher courant de bureaux ayant une charge d'exploitation de 3 à 4 kN/m².

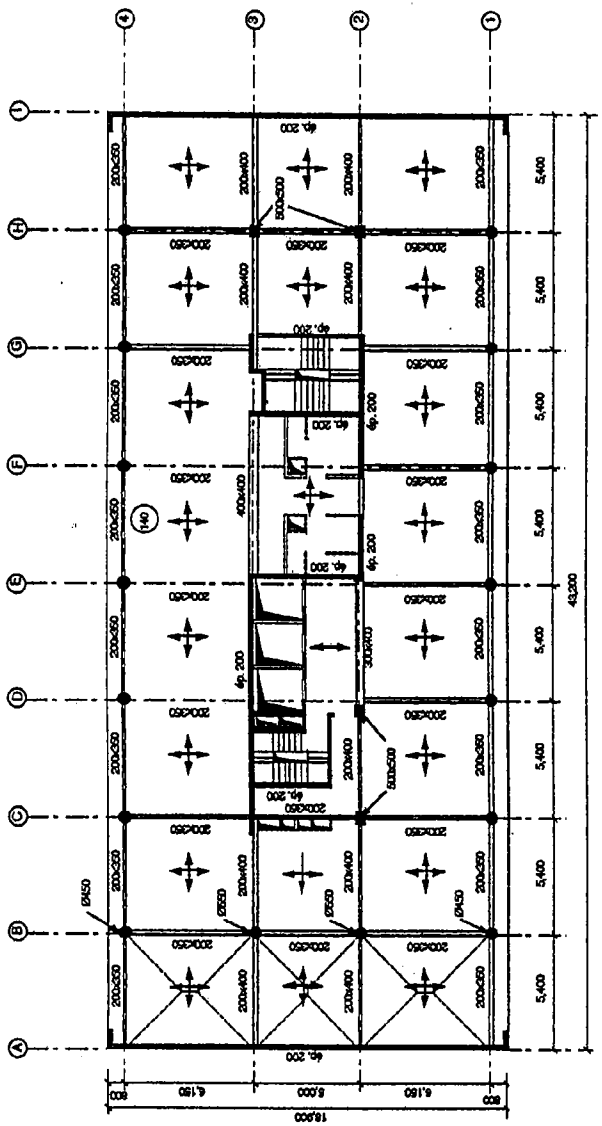


Fig.11 – Plan de dimensionnement du plancher d'étage courant.

Comme indiqué plus haut en 2.1, nous conserverons la même dimension de poteaux du rez-de-chaussée au dernier étage en prenant comme référence celui du 2ème étage (moyennant un léger renfort d'acier pour le 1er et le rez-de-chaussée).

Au 2e étage (du RdC au 9e)	Unité	Poteaux centraux axes 2 et 3	Poteaux voisins de façades axes 1 et 4
Nombre de niveaux	-	8	8
Charges	kN/m²	8,5 (1)	8,5
Aire de plancher attribuée au poteau	m²	$\frac{6,15+5}{2} \times 5,4 = 30,10$	$\left(\frac{6,15}{2} + 0,8\right) \times 5,4 = 20,92$
Charge ELS : N_{ELS}	MN	$\frac{8 \times 8,5 \times 30,1 \times 1,1}{1000} = 2,252$ (2)	$\frac{8 \times 8,5 \times 20,92}{1000} = 1,423$
Section poteau : $\frac{N_{ELS}}{10}$	m²	$\frac{2,252}{10} = 0,225$	$\frac{1,423}{10} = 0,142$
Poteau carré Poteau circulaire	mm mm	500 × 500 Ø550	400 × 400 Ø450

(1) Valeur intermédiaire entre 7 et 10 pour portées et charges moyennes. De plus, à ce stade de précision, on n'effectuera pas de dégression des charges d'exploitation.
(2) Pour des poteaux voisins de rive, on majore la charge de 10 % pour tenir compte de la réaction de continuité.

Au 2e sous-sol (du 1er au 3e sous-sol)	Unité	Poteaux centraux axes 2 et 3	Poteaux voisins de façades axes 1 et 4
Nombre de niveaux	-	11 en superstructure 1 en infracstructure	11 1
Charges	kN/m²	8,5 en super 8 en infra (1)	8,5 8
Aire de plancher attribuée au poteau	m²	30,10	20,92
Charge ELS : N_{ELS}	MN	$\frac{(11 \times 8,5 + 1 \times 8) \times 30,1 \times 1,1}{1000} = 3,360$	$\frac{(11 \times 8,5 + 1 \times 8) \times 20,92}{1000} = 2,123$

Au 2e sous-sol (du 1er au 3e sous-sol)	Unité	Poteaux centraux axes 2 et 3	Poteaux voisins de façades axes 1 et 4
Section poteau : $\frac{N_{ELS}}{10}$	m²	$\frac{3,360}{10} = 0,366$	$\frac{2,123}{10} = 0,212$
Poteau circulaire	mm	600 × 600 ou 400 × 850	500 × 500 ou 350 × 600

(1) Les planchers de sous-sols sont bruts avec une charge d'exploitation de 2,5 kN/m².

2.5.2 - Études d'exécution

On calcule les charges permanentes et les charges d'exploitation reprises par chaque poteau à chaque niveau avec un tableur (Excel par exemple), ce qui permet de pouvoir modifier les dimensions du poteau étudié s'il est insuffisant ou surabondant.

Poteaux B2 B3	Aire plancher m² Coeff. continuité Coeff. dégression	Élément	Dimensions (m) poteau et poutres			Charge unitaire kN/m²		Charges de l'étage MN		Charges cumulées MN		
			a (ouØ)	b	L	g	q	G	Q	G	Q	Q'(1)
PH9	30,1	plancher	-	-	-	6,542	1,0	0,2166	0,0331	0,2166		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,0172		
	1	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0064		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0062		
		Total						0,2465	0,0331	0,2465	0,0331	0,0331
PH8	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	0,3498		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,0345		
	1	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0128		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0124		
		Total						0,1631	0,1159	0,4095	0,1490	0,1490
PH7	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	0,4831		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,0517		
	0,9	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0193		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0186		
		Total						0,1631	0,1159	0,5726	0,2649	0,2533

Poteaux B2 B3	Aire plancher m² Coeff. continuité Coeff. dégression	Élément	Dimensions (m) poteau et poutres			Charge unitaire kN/m²		Charges de l'étage MN		Charges cumulées MN		
			a (ouØ)	b	L	g	q	G	Q	G	Q	Q'(1)
PH6	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	0,6163		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,0689		
	0,8	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0257		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0248		
		Total						0,1631	0,1159	0,7357	0,3808	0,3460
PH5	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	0,7495		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,0861		
	0,7	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0321		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0310		
		Total						0,1631	0,1159	0,8988	0,4967	0,4271
PH4	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	0,8828		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,1034		
	0,6	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0385		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0372		
		Total						0,1631	0,1159	1,0619	0,6125	0,4967
PH3	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	1,0160		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,1206		
	0,5	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0449		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,434		
		Total						0,1631	0,1159	1,2250	0,7284	0,5546
PH2	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	1,1492		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,1378		
	0,5	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0514		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0496		
		Total						0,1631	0,1159	1,3881	0,8843	0,6125
PH1	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	1,2825		
	1,1	poteau	0,55	-	2,96			0,0172		0,1551		
	0,5	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0578		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0558		
		Total						0,1631	0,1159	1,5512	0,9602	0,6705
PH0	30,1	plancher	-	-	-	4,024	3,5	0,1332	0,1159	1,4157		
	1,1	poteau	0,55	-	3,46			0,0201		0,1752		
	0,5	poutre 1	0,20	0,26	5,04			0,0064		0,0642		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0620		
		Total						0,1660	0,1159	1,7172	1,0761	0,7284

Poteaux B2 B3	Aire plancher m² Coeff. continuité Coeff. dégression	Élément	Dimensions (m) poteau et poutres			Charge unitaire kN/m²		Charges de l'étage MN		Charges cumulées MN		
			a (ou Ø)	b	L	g	q	G	Q	G	Q	Q'(1)
PH–1	30,1	plancher	-	-	-	4,806	4,0	0,1591	0,1324	1,5748		
	1,1	poteau	0,60	0,60	2,46			0,0217		0,1969		
	1	poutre 1	0,20	0,26	4,98			0,0063		0,0706		
		poutre 2	0,20	0,26	4,87			0,0062		0,0620		
		Total						0,1660	0,1324	1,9105	1,2085	0,8609
PH–2	30,1	plancher	-	-	-	3,630	2,5	0,1202	0,0828	1,6950		
	1,1	poteau	0,60	0,60	2,46			0,0217		0,2186		
	1	poutre 1	0,20	0,26	4,98			0,0063		0,0769		
		poutre 2	0,20	0,26	4,80			0,0061		0,0743		
		Total						0,1543	0,0828	2,0648	1,2913	0,9436
PH–3	30,1	plancher	-	-	-	3,630	2,5	0,1202	0,0828	1,8152		
	1,1	poteau	0,60	0,60	2,46			0,0217		0,2403		
	0,9	poutre 1	0,20	0,26	4,98			0,0063		0,0832		
		poutre 2	0,20	0,26	4,80			0,0061		0,0804		
		Total						0,1543	0,0828	2,2192	1,3741	1,0181

(1) Charge d'exploitation après application de la dégression par niveau suivant norme NF P 06-001.

Longueur des poutres appuyées sur poteaux circulaires : valeurs estimées en fonction du diamètre du poteau et de la largeur de la poutre :

$$\frac{6,15 + 5}{2} - 0,535 = 5,045 \text{ m} \quad \text{et} \quad 5,4 - 0,535 = 4,87 \text{ m}$$

Hauteur de poutre = hauteur de la retombée = 0,40 – 0,14 = 0,26 m.

EXEMPLE

Plancher haut du 9e : PH9

– poteau Ø 550 de 3,10 – 0,14 = 2,96 m de hauteur sous dalle, section = $\frac{\pi}{4} \times 0,55^2 \times$ 0,024 5 × 2,96 = 0,017 2 MN ;

plancher type 1 : $g = 6,542$ kN/m², d'où G = 30,1 m² × 1,1 de continuité × $\frac{6,542}{1000}$ = 0,2166 MN

$q = 1,0$ kN/m², d'où Q = 30,1 m² × 1,1 de continuité × $\frac{1,0}{1000}$ = 0,0331 MN

2.6. SEMELLES ISOLÉES

2.6.1. Études d'avant-projet

Le plancher bas du 3e sous-sol est un dallage reposant directement sur le sol et donc à ne pas prendre en compte pour le calcul de la semelle.

Nous prendrons, pour le dimensionnement, une contrainte de sol équivalent en ELS égale à :

$$q = \frac{0,5 q_u}{1,4} = \frac{0,5 \times 1,4}{1,4} = 0,5 \text{ MPa}$$

Au 3e sous-sol	Unité	Poteaux centraux axes 2 et 3	Poteaux voisins de façades axes 1 et 4
Nombre de niveaux	-	11 en superstructure 2 en infracstructure	11 2
Charges	kN/m²	8,5 en super 8 en infra	8,5 8
Aire de plancher attribuée au poteau	m²	30,10	20,92
Charge ELS : N_{ELS}	MN	$\frac{(11 \times 8,5 + 2 \times 8) \times 30,1 \times 1,1}{1000}$ = 3,626	$\frac{(11 \times 8,5 + 2 \times 8) \times 20,92}{1000}$ = 2,291
Section semelle : $\frac{N_{ELS}}{q}$ avec q = 0,5 MPa	m²	$\frac{3,626}{0,5} = 7,252$	$\frac{2,291}{0,5} = 4,582$
Semelle carrée	m	2,69 soit 2,70 × 2,70	2,14 soit 2,15 × 2,15

Remarque

On n'a pas pris en compte le poids propre de la semelle ce qui compense la non prise en compte de la dégression des charges d'exploitation.

2.6.2. Études d'exécution

En ELU, $N_u = 1,35\ G + 1,5\ Q' = 1,35 \times 2,219\ 2 + 1,5 \times 1,0181 = 4,523$ MN.

Il est rappelé que, pour le calcul d'un bâtiment (voir tome 1, chapitre 3, §.8.2 in fine), les charges non dégressées ne sont à utiliser que pour les combinaisons accidentelles.

La charge de calcul valant $q_u = 1{,}4$ MPa, on a $q = 0{,}5\ q_u$ (voir Tome 1, chapitre 4, §.1 et 3). En supposant *a priori* un poids volumique moyen sol-béton de 20 kN/m³ (18 pour le sol et 25 pour le béton). Le poids de la semelle et du sol, à 1 mètre de profondeur, représente une contrainte sur le sol égale à 20 kN/m³ × 1 m = 20 kPa.

En ELU, on retranche cette valeur à la contrainte limite du sol multipliée par 1,35 d'où :

$$q' = \frac{0{,}5 \times 1\,400 - 1{,}35 \times 20}{1\,000} = 0{,}673 \text{ MPa} = \frac{N_u}{AB}$$

Pour un dimensionnement d'une semelle carrée, on obtient :

$A = B = \sqrt{\frac{N_u}{q'}} = \sqrt{\frac{4{,}523}{0{,}673}} = 2{,}59$ m, soit 2,60 m au lieu de 2,70 estimé lors de l'étude d'avant-projet.

$h = \frac{A - a}{4} + 0{,}05 = \frac{2{,}60 - 0{,}6}{4} + 0{,}05 = 0{,}55$ m. Nous retiendrons une semelle plate bien que l'on préfère souvent une semelle tronconique pour $h > 0{,}40$ m.

2.7. CONTREVENTEMENT

2.7.1. Études d'avant-projet

• Calcul du vent suivant les NV65

Action du vent	Coefficient		Pression kN/m²
Région 1 : pression de base	-	-	0,50
Site normal	K_s	1,00	-
Hauteur maximale : 31,50	K_h	1,352	-
Coefficient de forme	C	1,30	-
Coefficient de largeur pour : – vent parallèle à l'axe 1 – vent parallèle à l'axe A	 δ_1 δ_A	 0,80 0,75	 - -
Coeff. de maj. dynamique a priori	β	1,10	-
Pression pour vent // axe 1 : q_{v1}	-	-	0,77
Pression pour vent // axe A : q_{vA}	-	-	0,73

Sollicitations du vent	Unité	Vent parallèle à l'axe 1	Vent parallèle à l'axe A
Largeur de la façade	m	18,90	43,20
Pression de calcul	kN/m²	0,77	0,73
Résultante de vent	MN	0,458	0,994
Moment/plancher bas du 3e S/S	MNm	10,80	23,39

Le contreventement est assuré par les seuls voiles à l'exclusion des poteaux. En effet, la répartition des sollicitations se faisant au prorata des inerties, le moment d'inertie d'un poteau de 0,50 × 0,50 est égal à $\frac{0{,}4^4}{12} = 0{,}002$ m⁴, valeur dérisoire devant l'inertie d'un voile 0,2 × 6,60 qui vaut $\frac{0{,}2 \times 6{,}6^3}{12} = 4{,}79$ m⁴.

• Vent parallèle à l'axe A

Les voiles de pignon ont une inertie beaucoup plus importante que les voiles centraux et donc reprennent la quasi-totalité de l'effort de vent (Fig. 12).

Inerties	Moment d'inertie	
Voiles de pignon	$2\left[0{,}9 \times \frac{18{,}9^3}{12} - 0{,}7 \times \frac{18{,}5^3}{12}\right] = 274$ m⁴	90 %
Voiles centraux assimilables a priori à deux rectangles 4,0 × 5,4 hors tout	$2\left[4{,}0 \times \frac{5{,}4^3}{12} - 3{,}6 \times \frac{5^3}{12}\right] = 30$ m⁴	10 %
Inertie totale	304 m⁴	100 %

Contrainte maximale ELS de flexion due au vent :

$\sigma_{fl} = \frac{Mv}{\sum I} = \frac{23{,}39 \times 9{,}45}{304} = 0{,}72$ MPa valeur très faible qui est même inférieure à la contrainte de poids propre du voile (39,3 m × 24,5 kN/m³ = 963 kPa = 0,96 MPa).

• Vent parallèle à l'axe 1

Les voiles de pignon jouent un rôle tout à fait négligeable. Les voiles centraux n'ayant pas leur centre de gravité des inerties dans le plan médian du bâtiment, il y aura une légère torsion d'ensemble qui augmentera un peu la contrainte de flexion seule.

Le voile le plus long, de 12,0 m de longueur a une inertie supérieure à celle d'un voile simple

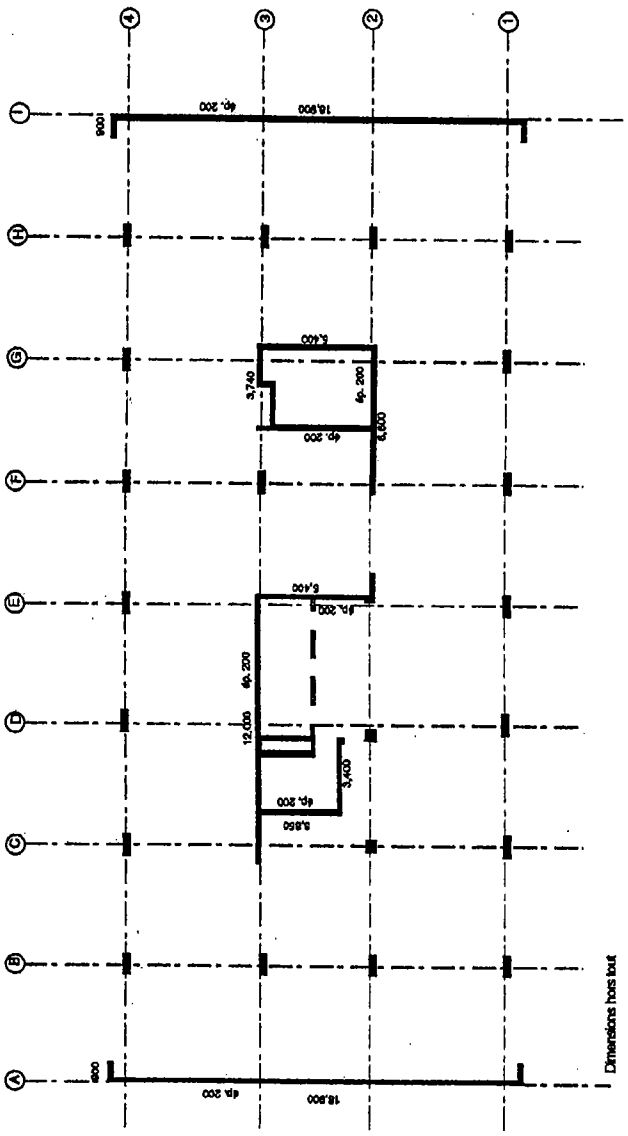


Fig. 12 – Voiles de contreventement en sous-sol.

0,20 × 12,0, soit $I = \frac{0,2 \times 12^3}{12} = 28,8$ m⁴. De même, le voile composé de 6,60 m de longueur a une inertie supérieure à $\frac{0,2 \times 6,6^3}{12} = 4,79$ m⁴.

Contrainte maximale ELS de flexion due au vent :

$\sigma_{fl} < \frac{M v}{\sum I} = \frac{10,8 \times 6}{28,8 + 4,79} = 1,93$ MPa valeur faible par rapport à la contrainte limite de compression qui est de l'ordre de 4 à 7 MPa en ELS (6 à 10 en ELU).

2.7.2. Études d'exécution

Le dimensionnement effectué au stade de l'avant-projet montre que les voiles d'épaisseur 0,20 m sont largement suffisants. Il n'est pas nécessaire de les redimensionner lors des calculs d'exécution.

3. ÉTUDE D'EXÉCUTION - PLANS DE COFFRAGE ET DE FERRAILLAGE

Les charges permanentes et les charges d'exploitation sont définies en 1.2 et 1.3 ci-dessus, à l'exception du plancher bas du rez-de-chaussée, appelé couramment plancher haut du 1er sous-sol (PH-1).

On notera cependant que, ne connaissant pas les positions des cloisons lourdes de la cuisine et des réserves, nous tablerons sur des cloisons de parpaings creux non porteurs de 0,15 m d'épaisseur soit 13,5 kN/m² (valeur peu différente de celle du plâtre qui est de 13), disposés sur une maille minimale de 3 m par 4 m, soit 7 m de cloisons pour 12 m² de plancher ou encore 0,583 m/m².

Hauteur de cloison = hauteur d'étage – épaisseur de la dalle = 3,60 m – 0,14 m = 3,46 m
Poids de 0,583 m de cloison par m² de plancher :
0,583 × 3,46 × 13,5 × 0,15 = 4,09 kN/m².

Nous retiendrons les charges suivantes :

Charges(kN/m²)

	Revêtement	Type	g kN/m²	Cloisons kN/m²	Charges d'exploitation kN/m²
Hall	marbre + chape	3	4,806	-	4,0
Scramble et cafétéria	carrelage + chape	3	4,806	-	4,0
Cuisine et réserves	carrelage + chape	3	4,806	4,09	3,5
Sanitaires	carrelage + chape	3	4,806	1,0	2,5
Informatique et bureaux	moquette	2	4,024	1,0	2,5
Local transformateur	chape isolante	3	4,806	-	10,0
Local poubelle	carrelage + chape	3	4,806	-	4,0
Livraisons	carrelage + chape	3	4,806	-	10,0

3.1. DALLE D'ÉTAGE COURANT

Nous limiterons notre étude aux trames comprises entre les axes A et B.

• **Portées de calcul**

Pour une largeur de poutre de 0,20 m , les portées entre nus des dalles sont égales à :

$5,40 - 0,20 = 5,20$ m
$6,15 - 0,20 = 5,95$ m
$5,00 - 0,20 = 4,80$ m

La charge de calcul vaut :

$$p_u = 1,35\,g + 1,5\,q = 1,35 \times 4,024 + 1,5 \times 3,5 = 10,68 \text{ kN/m}^2.$$

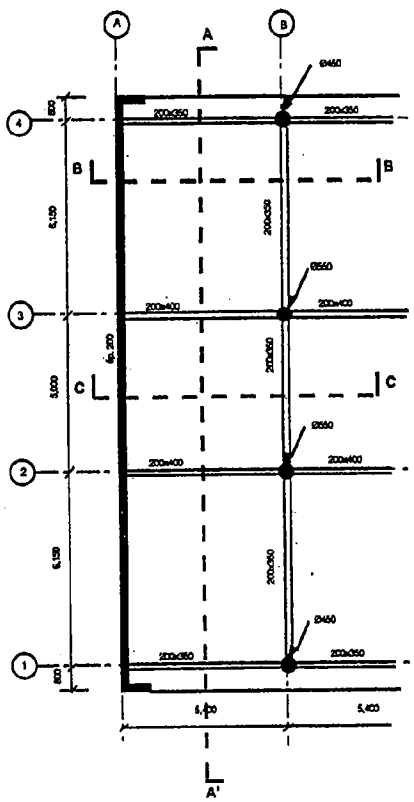


Fig. 13 - Plancher étage courant entre les axes A e B.

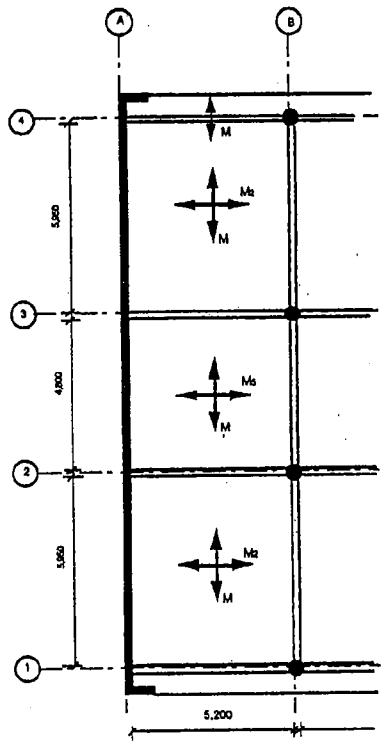


Fig. 14 - Moments isostatiques (dalle appuyée sur ses 4 côtés).

Les dalles sont en continuité et portent dans les deux directions. Nous utiliserons la méthode forfaitaire donnée par les *règles BAEL* 91, art. A.8.2.3 (voir tome 2, chapitre 6, §.4.4).

Le porte-à-faux de 0,70 m donne un moment M_1 (Fig. 14) :

$$M_1 = \frac{pL^2}{2} = \frac{10,68 \times 0,7^2}{2} = 2,62 \text{ kNm/m}$$

On calcule les moments isostatiques de la dalle ci-dessus simplement appuyée sur ses 4 côtés en utilisant le tableau suivant :

Dalle rectangulaire simplement appuyée sur ses 4 côtés

	ν = 0		ν = 0,2	
L_x/L_y	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,05	-	-	0,125	0,293
0,10	-	-	0,125	0,312
0,15	-	-	0,125	0,296
0,20	0,1245	(*)	0,125	0,289
0,25	0,1230	(*)	0,123	0,295
0,30	0,1200	(*)	0,121	0,304
0,35	0,1156	(*)	0,117	0,314
0,40	0,1099	(*)	0,112	0,329
0,45	0,1034	(*)	0,106	0,353
0,50	0,0965	0,2584	0,100	0,383
0,55	0,0892	0,2889	0,093	0,421
0,60	0,0820	0,3289	0,087	0,468
0,65	0,0750	0,3781	0,080	0,524
0,70	0,0683	0,4388	0,074	0,583
0,75	0,0620	0,5124	0,068	0,646
0,80	0,0561	0,5964	0,063	0,712
0,85	0,0506	0,6871	0,058	0,780
0,90	0,0456	0,7845	0,053	0,851
0,95	0,0410	0,8887	0,048	0,924
1,00	0,0368	1,0000	0,044	1,000

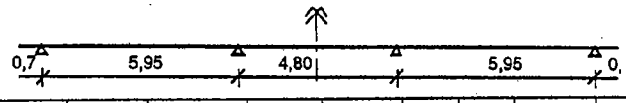
(*) Minimum 0,25 d'après BAEL 91, art. A.8.2.42

Remarque

Les valeurs de μ_y du tableau sont supérieures à celles du BAEL en Annexe E3. En effet ce sont des valeurs maximales alors que le BAEL donnent les valeurs au milieu de la dalle.

Rapport des côtés	Moment principal suivant la petite portée (kNm/m)	Moment secondaire suivant la grande portée (kNm/m)
$\frac{5,2}{5,95} = 0,874$	$M_2 = 0,04819\ pL^2$ $0,04819 \times 10,68 \times 5,2^2 = 13,92$	$M_3 = 0,734\ M_2 = 10,22$
$\frac{4,8}{5,2} = 0,923$	$M_4 = 0,04347\ pL^2$ $0,04347 \times 10,68 \times 4,8^2 = 10,70$	$M_5 = 0,8326\ M_4 = 8,91$

Coupe AA'

$M_1 = 2,62$ $M_3 = 10,22$ $M_4 = 10,70$									
Moment isostatique M_o	$-M_1$	M_3	. .	-	M_4			M_3	$-M_1$
Moment en travée	-	0,85 M_3 = 8,69			0,75 M_4 = 8,03			0,85 M_3 = 8,69	
Fermeture à 1,25 M_o	$M_1 = -2,62$ = −0,256 M_3	8,89	−0,544 M_3 = −5,56 (1)	−0,5 M_4 = −5,35		sym.	sym.	sym.	sym
Moments retenus kNm/m	−2,62	8,69	−5,56 (2)		8,03	symétrique			
Hauteur utile d (m) (3)	0,120	0,110	0,120		0,12	symétrique			
Moment réduit $\frac{M_u}{bd^2\sigma_{bu}} 10^{-3}$ < 0,37	0,01284	0,05070	0,02725		0,0394	symétrique			
$z = 0,5\ d\ (1 + \sqrt{1 - 2\mu})$	0,1192	0,1071	0,1183		0,1176	symétrique			
$A_s = \frac{1,15 M_u}{z f_e}$	0,50	1,87	1,08		1,57	symétrique			
Retenons (4)	0,50	1,87	1,16		1,57	symétrique			

(1) Fermeture à 1,25 M_3 donc $\frac{0,256}{2} + 0,85\ M_3 + \frac{x}{2} = 1,25\ M_3$ d'où $x = 0,544\ M_3 = 5,56$, valeur voisine de 5,35.

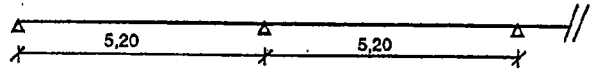
(2) Maximum de 5,35 et 5,56.

(3) d = h − enrobage − Ø/2 pour les aciers principaux, soit d = 0,14 − 0,015 − 0,005 = 0,120 m en supposant que le diamètre maximal des aciers est de 10 mm, et d = h − 1,5 Ø = 0,110 m pour les aciers secondaires. Les aciers principaux correspondent au plus grand moment. On retient volontairement un enrobage de 15 mm bien que le minimum réglementaire soit de 10 mm.

(4) Pourcentage minimal : $\rho_o = \frac{0,23 f_{t28}}{f_e} = \frac{0,23 \times 2,1}{500} = 0,097\ \%$, soit pour d = 0,12 m ; 1,16 cm²/m.

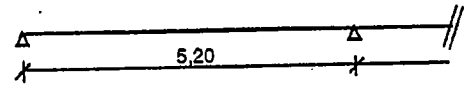
Comme le rapport des côtés des dalles est peu différent de 1, nous ne modulerons pas le % minimum en fonction du rapport des côtés (voir [1], p.133).

Coupe BB'

$M_2 = 13,92$						
Moment isostatique M_o	-	$M_2 = 13,92$			$M_2 = 13,92$	
Moment en travée		$0,85\ M_2$ $= 11,83$			$0,75\ M_2$ $= 10,44$	
Moment sur appuis pour fermeture à $1,25\ M_o$	$-0,15\ M_2$ $= -2,09$ (1)	-	$-0,65\ M_2$ $= -9,05$	$-0,5\ M_2$ $= -6,96$	-	$-0,5\ M_2 = -6,96$
Moments retenus kNm/m	$-0,15\ M_2$ $= -2,09$ (1)	11,83	$-9,05$		10,44	$-6,96$
Hauteur utile d (m) (2)	0,12	0,12	0,12		0,12	0,12
Moment réduit $\frac{M_u}{bd^2\sigma_{bu}} 10^{-3} < 0,37$	0,01025	0,05799	0,04436		0,05118	0,03412
$z = 0,5\ d\ (1 + \sqrt{1 - 2\mu})$	0,1194	0,1164	0,1173		0,1168	0,1179
$A_s = \frac{1,15M_u}{zf_e}$	0,41	2,34	1,77		2,06	1,36
Retenons (5)	0,41	2,34	1,77		2,06	1,36

(1) Il est rappelé que sur appuis de rive, on doit disposer d'un minimum d'armatures capable de reprendre 0,15 fois le moment isostatique.
(2) d = 0,120 m pour le plus élevé des deux moments dans les deux directions perpendiculaires (acier principal).

Coupe CC'

$M_4 = 10,7$ $M_5 = 0,8326\ M_4$ $= 8,91$			
Moment isostatique M_o	-	$M_5 = 8,91$	-
Moment en travée	-	$0,85\ M_2$ $= 9,57$	-
Moment sur appuis pour fermeture à $1,25\ M_o$	$-0,15\ M_5$ $= -1,34$ (1)	-	$-0,65\ M_5 = -5,79$
Moments retenus kNm/m	$-1,34$	9,57	$-5,79$
Hauteur utile d (m) (2)	0,12	0,11	0,12
Moment réduit $\frac{M_u}{bd^2\sigma_{bu}} 10^{-3} < 0,37$	0,00657	0,04416	0,02838
$z = 0,5\ d\ (1 + \sqrt{1 - 2\mu})$	0,1196	0,1075	0,1183
$A_s = \frac{1,15M_u}{zf_e}$	0,26	1,62	1,13
Retenons (5)	0,26	1,62	1,13 (1)

(1) Pour des dalles continues, on applique la condition de pourcentage minimum à la somme des aciers inférieurs et de la demi-somme des aciers supérieurs qui doit être supérieure à deux fois le pourcentage minimal ($2 \times 1,17$ cm²/m) (Art. B7.4. du BAEL 91) : $\frac{1,62}{2} + 1,13 + \frac{1,62}{2} = 2,75 \leq 2 \times 1,17 = 2,34$ **OK.**

• Arrêt des armatures supérieures pour des dalles portant dans deux directions

Les abaques suivants (Fig. 16 et 18) donnent les valeurs des moments suivant le petit côté et le grand côté pour un rapport donné L_x/L_y avec $L_x \geq L_y$. En traçant la ligne de fermeture des moments sur appuis, on en déduit la longueur des chapeaux.

Aciers parallèles au petit côté . Panneau compris entre les axes A et B, 2 et 3

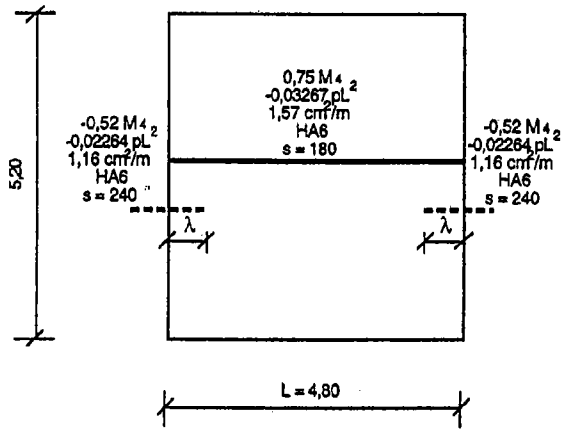


Fig. 15 – Dalle entre A et B et axes 2 et 3 - Aciers et moments suivant la petite portée.

)mme la méthode forfaitaire du BAEL manque de précision, nous n'interpolerons pas, mais endrons la courbe située en dessous et nous arrondirons la longueur aux 20 cm supérieur.

ır l'abaque suivant (Fig. 16), on prend la courbe au-dessous de celle qui correspond au pport $L_x/L_y = 4,8/5,2 = 0,92$, soit la courbe 1,00 puis on trace la droite joignant les points ordonnées 0,2264 et 0,2264, qui représente la valeur des moments sur appuis exprimés en ıction de pL^2, L = petite portée (voir Fig. 15).

ı lit la longueur λ :

$$\lambda = 0,145\ L = 0,145 \times 4,80 = 0,696\ m$$

ı doit s'assurer que cette longueur est supérieure à la longueur de scellement droit (pour s treillis soudés, on doit également vérifier les 3 soudures) :

$$45\ \varnothing = 45 \times 0,006 = 0,27\ m$$

ı longueur du chapeau est égale à : $0,696 + 0,8\ h = 0,808$ m, que nous arrondissons à 00 m.

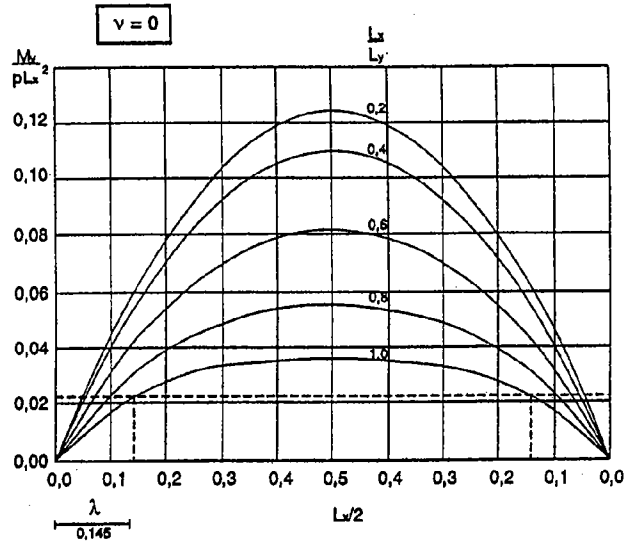


Fig. 16 – Dalle rectangulaire appuyée simplement sur ses 4 côtés. Moments suivant la petite portée L_x.

b) Aciers parallèles au grand côté - Panneau compris entre les axes A et B, 2 et 3

On opère de même avec les aciers parallèles au grand côté avec l'abaque de la Figure 18.

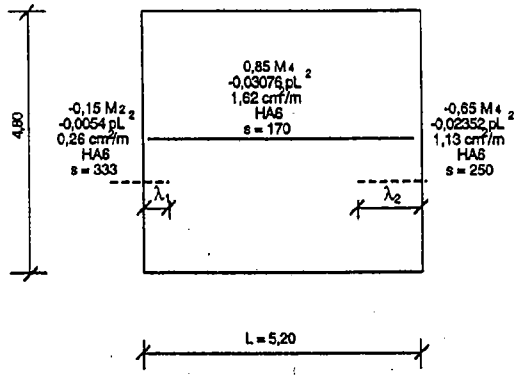


Fig. 17 – Dalle entre A et B et axes 2 et 3. Aciers et moments suivant la grande portée.

On trace la courbe correspondant au rapport 1,00 (pour un rapport des côtés de 0,923) qui donnera dans notre cas des longueurs plus grandes (on va ainsi dans le sens de la sécurité), puis la droite joignant les deux ordonnées 0,0054 et 0, 2352.

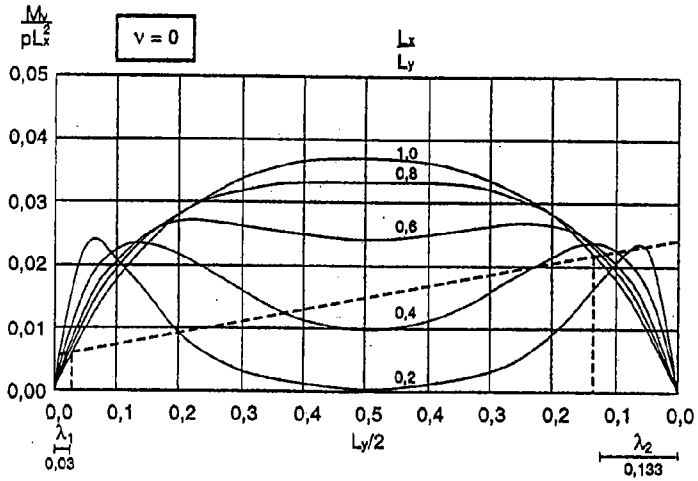


Fig. 18 – Dalle rectangulaire appuyée simplement sur ses 4 côtés. Moments suivant la grande portée L_y.

Remarque

On note sur la figure 18 que, pour des dalles longues, c'est-à-dire dont le rapport des côtés est inférieur à 0,2, les moments correspondant aux aciers parallèles au grand côté peuvent atteindre près de 20 % du moment transversal (de la figure 16).

On obtient les longueurs λ_1 et λ_2, d'où les longueurs des chapeaux :

$\lambda_1 = \text{Max}\,[\lambda_1 ; 45\varnothing] + 0{,}8\,h = \text{Max}\,[0{,}03 \times 5{,}2 ; 45 \times 0{,}006] + 0{,}8 \times 0{,}14 = 0{,}382$ arrondi à 0,40 m et

$\lambda_2 = \text{Max}\,[\lambda_2 ; 45\varnothing] + 0{,}8\,h = \text{Max}\,[0{,}133 \times 5{,}2 ; 45 \times 0{,}006] + 0{,}8 \times 0{,}14 = 0{,}804$ arrondi 1,00 m.

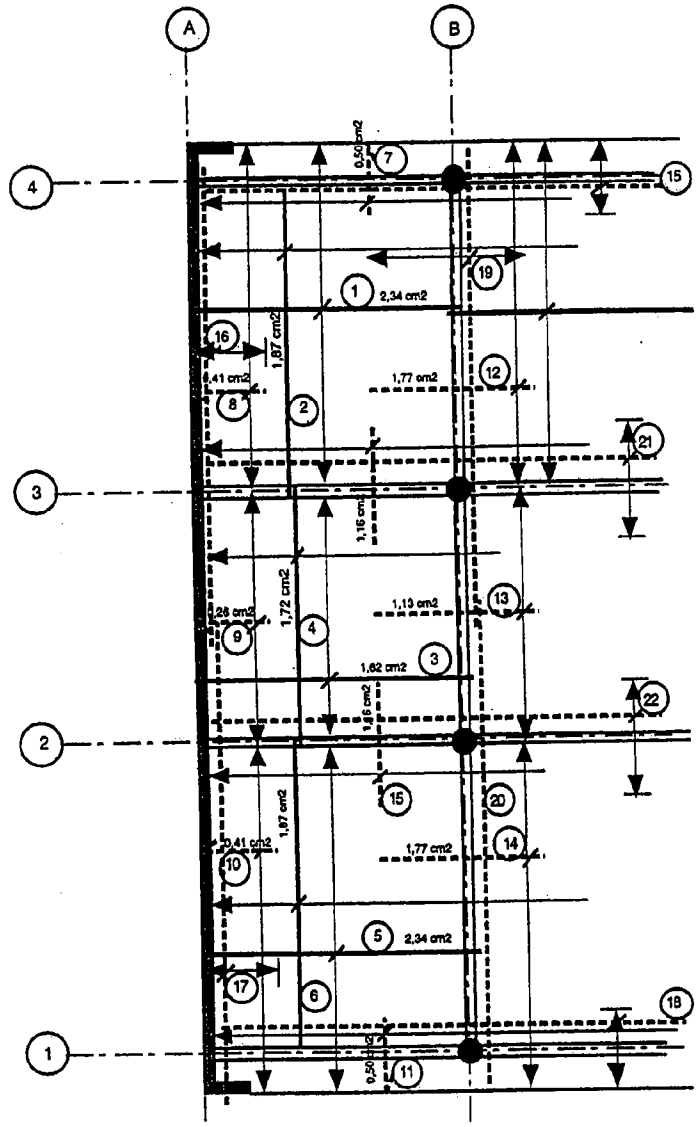


Fig. 19 – Sections d'aciers en cm2/m . Aciers HA (les chapeaux sont représentés en tiretés).

Nomenclature des aciers

Repère	Nombre	Diamètre mm	Espacement mm	Longueur développée m	Longueur hors tout	Largeur hors tout	Poids kg	Schéma
1	50	HA6	120	5,300	5,300	-	58,82	5,300
2	34	HA6	150	6,250	6,250	-	47,17	6,250
3	28	HA6	175	5,300	5,300	-	32,94	5,300
4	31	HA6	160	5,100	5,100	-	35,09	5,100
5	50	HA6	120	5,300	5,300	-	58,82	5,300
6	34	HA6	150	6,250	6,250	-	47,17	6,250
7	15	HA6	333	2,630	1,270	110	8,76	1270 / 110
8	21	HA6	333	1,930	0,570	110	9,00	570 / 110
9	15	HA6	333	1,930	0,570	110	6,43	570 / 110
10	21	HA6	333	1,930	0,570	110	9,00	570 / 110
11	15	HA6	333	2,630	1,270	110	8,76	1270 / 110
12	37	HA6	160	2,600	2,600	-	21,35	2,600
13	20	HA6	250	2,200	2,200	-	9,77	2,200
14	37	HA6	160	2,600	2,600	-	21,35	2,600
15	5	HA6	333	5,510	5,510	-	6,11	5,510
16	3	HA6	333	9,560	9,560	-	6,37	9,560
17	3	HA6	333	9,560	9,560	-	6,37	9,560
18	5	HA6	333	5,510	5,510	-	6,11	5,510
19	7	HA6	333	9,560	9,560	-	14,85	9,560
20	7	HA6	333	9,560	9,560	-	14,85	9,560
21	7	HA6	333	5,510	5,510	-	8,56	5,510
22	7	HA6	333	5,510	5,510	-	8,56	5,510
						Total	446,21	

es longueurs des barres en U peuvent être lues dans le tableau en fin de chapitre 10 du tome 3.

• **Choix des aciers :**

- aciers en barres à haute adhérence : long et couteux à mettre en oeuvre (Fig. 19) ;
- treillis soudés de la gamme complète, c'est-à-dire de diamètres allant de 3 à 12 mm et espacements de 50 à 300 mm (Fig. 20 et 21) ;
- treillis soudés choisis parmi la gamme de panneaux standards : plus lourd que le cas précédent, mais moins cher au kg.

Étude en treillis soudés standards

• **Panneaux standard ADETS**

Désignation	Section A_{s1} cm²/m	Diamètre principal $\varnothing_1$ mm	Diamètre secondaire $\varnothing_2$ mm	Aire A_{s1} cm²/m	Aire A_{s2} cm²/m	Espacement s_1 mm	Espacement s_2 mm	Longueur panneau L_1 m	Largeur panneau L_2 m	Poids au m² kg/m²	Poids panneau kg
P131R	1,31	5	5,5	1,31	0,95	150	250	4,75	2,40	1,774	20,22
P188R	1,88	6	5,5	1,88	0,95	150	250	6,00	2,40	2,226	32,05
P221R	2,21	6,5	5,5	2,21	0,95	150	250	6,00	2,40	2,483	35,75
P283R	2,83	6	5,5	2,83	0,95	100	250	6,00	2,40	2,966	42,70
P385R	3,85	7	7,5	3,85	1,47	100	300	6,00	2,40	4,177	60,15
P503R	5,03	8	7,5	5,03	1,77	100	250	6,00	2,40	5,333	76,80
P636R	6,36	9	9	6,36	2,12	100	300	6,00	2,40	6,659	95,88
P221C	2,21	6,5	7,5	2,21	2,21	150	200	6,00	2,40	3,471	49,98
P385C	3,85	7	7	3,85	3,85	100	100	6,00	2,40	6,042	87,01
P636C	6,36	9	9	6,36	6,36	100	100	6,00	2,40	9,988	143,83

Treillis en acier à haute adhérence : longueur d'ancrage et de recouvrement : $L_d = 45\ \varnothing$

Nombre de panneaux pour une longueur L donnée > longueur ou largeur du panneau :
– dans le sens longitudinal (longueur du panneau = L_1)

$$n_1 = \frac{L - 45\varnothing_1}{L_1 - 45\varnothing_1}$$

– dans le sens transversal (largeur du panneau = L_2)

$$n_2 = \frac{L - 45\varnothing_2}{L_2 - 45\varnothing_2}$$

Longueur de recouvrement des panneaux pour une longueur L et un nombre de panneaux donné :
– dans le sens longitudinal

$$r_1 = \frac{n_1 L_1 - L}{n_1 - 1}$$

- dans le sens transversal

$$r_2 = \frac{n_2 L_2 - L}{n_2 - 1}$$

Chapeaux de rive

Les panneaux de treillis soudés standards ne sont pas très bien adaptés pour réaliser les chapeaux de rive. La meilleure solution consiste à disposer des U, la branche supérieure servant de chapeaux, la branche inférieure d'acier de glissement pour reprendre l'effort tranchant.

Étude des aciers inférieurs (Fig. 20)

La meilleure solution consiste à disposer deux panneaux P131R superposés (2 lits), l'un dans un sens, l'autre orienté à 90°. L'aire dans les deux directions vaut : 1,31 + 0,95 = 2,26 cm²/m.
Les sections d'aciers inférieurs nécessaires varie de 1,57 à 2,34 cm²/m.
Nous pouvons nous contenter de 2,26 cm² au lieu de 2,34 en respectant la condition de fermeture :

$$\frac{M_e + M_w}{2} + M_t \geqslant 1{,}25\, M_0$$

Or avec des chapeaux de rive : HA 6, $s = 330$ (soit 0,85 cm²/m au lieu de 0,41) et des chapeaux en axe B de 2,21 cm²/m (P221C) au lieu de 1,77 nécessaire, on a :

$$\frac{0{,}85 + 2{,}21}{2} + 2{,}26 = 3{,}79 > \frac{0{,}41 + 1{,}77}{2} + 2{,}34 = 3{,}43 \quad \text{OK.}$$

Longueur sur laquelle on doit mettre des aciers inférieurs parallèlement à l'axe A : $2 \times 6{,}15 - 5{,}0 = 17{,}30$ m (ainsi, on aura une longueur de 10 cm ancrée dans la poutre de l'axe 4 ; on pourrait vérifier que c'est suffisant pour reprendre l'effort tranchant déduction faite du rapport M/z).

Nombre de panneaux parallèlement à l'axe A et dont la longueur est parallèle à l'axe A :

$$n_1 = \frac{17{,}30 - 45 \times 0{,}005}{4{,}75 - 45 \times 0{,}005} = 3{,}77 \text{ arrondi à } 4$$

recouvrement réel des panneaux : $\dfrac{4 \times 4{,}75 - 17{,}30}{3} = 0{,}567$ m, arrondi à 0,56 m.

Nombre de panneaux parallèlement à l'axe A et dont la largeur est parallèle à l'axe A :

$$n_2 = \frac{17{,}30 - 45 \times 0{,}005\,5}{2{,}40 - 45 \times 0{,}005\,5} = 7{,}92 \text{ arrondi à } 8$$

recouvrement réel des panneaux : $\dfrac{8 \times 2{,}40 - 17{,}30}{7} = 0{,}271$ m, arrondi à 0,27 m.

Étude des aciers supérieurs (Fig. 21)

Sur l'axe B : sections d'acier nécessaires 1,77 et 1,13 cm²/m. Nous retiendrons des panneaux P221C de 2,21 cm² dans les deux directions et de dimensions 2,40 m × 6,00 m.

Longueur : $L = 17{,}30 + 2 \times 0{,}80 = 18{,}90$ m

Nombre de panneaux parallèlement à l'axe A et dont la longueur est parallèle à l'axe A :

$$n_1 = \frac{18{,}90 - 45 \times 0{,}006\,5}{6{,}00 - 45 \times 0{,}006\,5} = 3{,}26 \text{ arrondi à } 3{,}5$$

(nous disposerons l'autre moitié du panneau sur l'axe C)

recouvrement réel des panneaux : $\dfrac{3{,}5 \times 6{,}00 - 18{,}90}{3} = 0{,}70$ m.

Sur les axes 2 et 3 : sections d'acier nécessaires 1,16 cm²/m. Nous retiendrons des panneaux P221C de 2,21 cm² dans les deux directions et de dimensions 2,40 m × 6,00 m.

Recouvrement : $45 \times 0{,}0065 = 0{,}292$, soit 0,30 m.

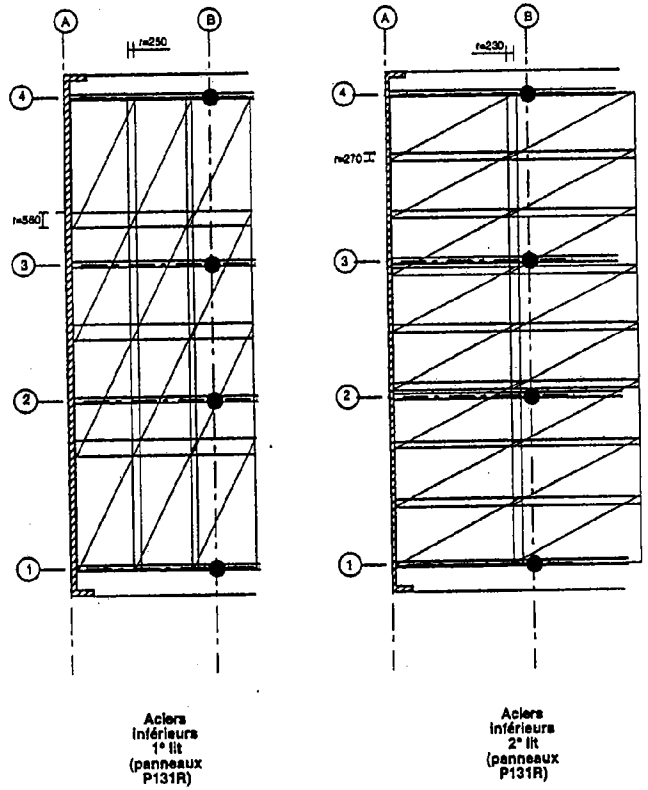
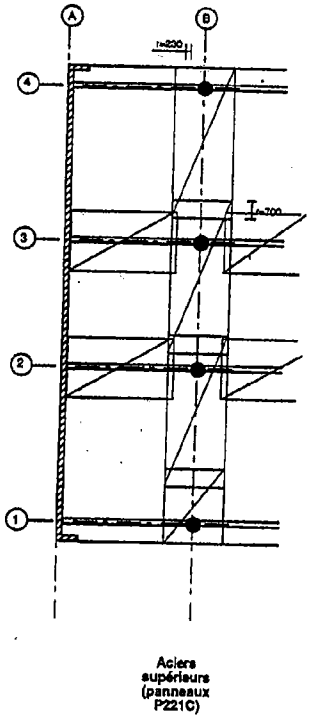


Fig. 20 – Aciers inférieurs en treillis soudés. Panneaux standards.



Ne pas oublier les aciers de chapeau de rive n° 7 à 11 de la figure 19

Fig. 21 – Aciers supérieurs (Chapeaux) en treillis soudés . Panneaux standards.

• Vérification à l'ELS

La vérification à l'ELS n'est pas exigée pour les aciers dans le cas de fissuration peu préjudiciable. La contrainte de compression du béton est très généralement vérifiée dans les dalles. Sinon, on peut calculer le moment réduit ELS : $\beta = \dfrac{M_{ELS}}{bd^2}$ sachant que M_{ELS} ne peut dépasser la valeur $\dfrac{M_u}{1{,}35}$ d'où :

$$\beta \leq \frac{M_u}{1{,}35\, bd^2} = \frac{\mu \sigma_{bu}}{1{,}35}.$$

Or, d'après les résultats des deux tableaux précédents, μ vaut au maximum 0,058, d'où :

$\beta_{max} = \dfrac{14{,}17 \times 0{,}058}{1{,}35} = 0{,}61 < 3$ **OK** (voir tome 1, tableau 1).

3.2. POUTRES D'ÉTAGE COURANT

Nous n'étudierons que la poutre de rive, axe 4, entre les axes A et D (Fig. 22). La longueur de l'appui avec un poteau circulaire, est prise égale à celle d'un poteau carré de même section :

$$\sqrt{\frac{\pi\, 0{,}45^2}{4}} = 0{,}40 \text{ m}$$

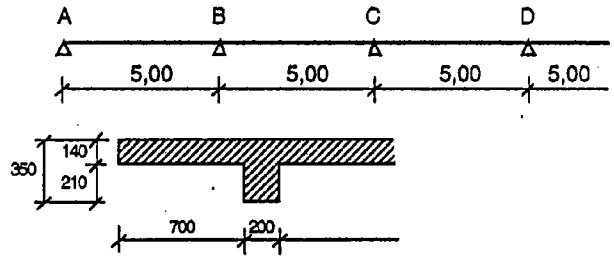


Fig. 22 – Poutre axe 1 (portées entre nus).

3.2.1. Charges linéaires (Fig. 6)

Plancher type 2 : $g_0 = 4{,}024$ kN/m²
Charge d'exploitation bureaux : $q_0 = 3{,}5$ kN/m²
Charge de façade : $g_1 = 1{,}3$ kN/m
Poids propre de la retombée de poutre : $g_2 = 0{,}2 \times 0{,}21 \times 24{,}5 = 1{,}03$ kN/m

$G_1 = g_1 + g_2 + 0{,}8\, g_0 = 5{,}55$ kN/m (pour 0,8 m de console)
$Q_1 = 0{,}8\, q_0 = 2{,}8$ kN/m
$G_2 = 2{,}7\, g_0 = 10{,}86$ kN/m (pour 2,70 m de largeur de demi-dalle)
$Q_2 = 2{,}7\, q_0 = 9{,}45$ kN/m

3.2.2. Moments ELU et aciers longitudinaux

Pour le calcul des moments sur appuis, les charges triangulaires peuvent être assimilées à des charges réparties uniformes de même valeur affectées d'un coefficient réducteur (voir [1], p. 212, colonne ω_g pour le calcul des moments sur appuis) ; ce coefficient vaut 0,625 pour des charges triangulaires.

On étudie les trois combinaisons de charge avec (Fig. 23) :
$G = 1{,}35\,(G_1 + 0{,}625\, G_2) = 16{,}66$ kN/m
$Q = 1{,}50\,(Q_1 + 0{,}625\, Q_2) = 13{,}06$ kN/m

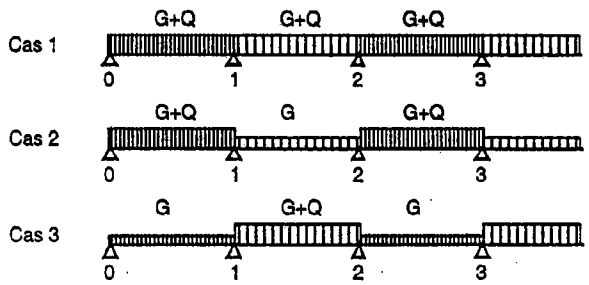


Fig. 23 – Combinaisons de cas de charges.

Moment isostatique ELU pour G : $M = \frac{GL^2}{8} = 52{,}06$ kNm ; pour G + Q : M = 92,88 kNm.

• **Méthode de Caquot** (plus simple d'utilisation que l'équation des trois moments)

Pour des travées égales (voir tome 1, chapitre 1, équation 27) :
– appui de rive : $M_0 = 0$

– appui voisin de rive : $M_1 = -\frac{p_1 L^3 + 0{,}8^3 p_2 L^3}{8{,}5(L + 0{,}8\,L)} = -\frac{p_1 + 0{,}512\,p_2}{15{,}3} L^2$

– appui intermédiaire : $M_2 = -\frac{p_2 0{,}8^3 L^3 + p_3 0{,}8^3 L^3}{8{,}5(0{,}8\,L + 0{,}8\,L)} = -\frac{p_2 + p_3}{26{,}56} L^2$

$$M_3 = -\frac{p_3 + p_4}{26{,}56} L^2$$

Les valeurs de *p* sont égales à G ou G + Q suivant les combinaisons étudiées.

Hauteur utile : $d = h$ – enrobage du centre de gravité des aciers tendus = 0,35 – 0,05 = 0,30 m *a priori*.

	Unité	Travée 1 M_{t1}	Appui 1 m_1	Travée 2 M_{t2}	Appui 2 M_2	Travée 3 M_{t3}	Appui 3 M_3	Travée 4 M_{t4}
Moment cas 1	kNm	59,79	–73,43	28,39	–55,95	36,93	–55,95	36,93
Moment cas 2	kNm	64,25	–62,50	–0,59	–43,66	49,22	–43,66	49,22
Moment cas 3	kNm	29,27	–52,09	45,05	–43,66	8,40	–43,66	8,40
Moment maximal en valeur absolue (1)	kNm	64,25	–73,43	45,05	–55,95	49,22	–55,95	49,22

	Unité	Travée 1 M_{t1}	Appui 1 m_1	Travée 2 M_{t2}	Appui 2 M_2	Travée 3 M_{t3}	Appui 3 M_3	Travée 4 M_{t4}
Moment minimal en valeur absolue	kNm	29,27	–52,09	–0,59(3)	–43,66	8,40	–43,66	8,40
$\mu = \frac{M}{bd^2\sigma_{bu}} < 0{,}37$		0,2520	0,2880	0,1767	0,2194	0,1930	0,2194	0,1930
$z = 0{,}5d(1+\sqrt{1-2\mu})$	m	0,2556	0,2477	0,2706	0,2624	0,2675	0,2624	0,2675
$A_s = \frac{1{,}15M}{zf_e}$ (2)		5,78	6,82	3,83	4,90	4,23	4,90	4,23
soit Ø et cm²		2HA14 +2HA14 = 6,16	2HA16 +2HA14 = 7,10	2HA12 +2HA10 = 3,83	2HA14 +2HA12 = 5,34	2HA12 +2HA12 = 4,52	2HA14 +2HA12 = 5,34	2HA12 +2HA12 = 4,52
Moment résistant (4)	kNm	67,67	75,79	45,09	60,15	52,18	60,15	52,18
Moment résistant du 1° lit (5)	kNm	33,83	42,91	26,61	34,69	26,09	34,69	26,09

(1) Pour des moments sur appuis M_1 et M_2 et pour un moment isostatique M_0, le moment maximal en travée est donné par $M_{max} = M_0 + \frac{M_1 + M_2}{2} + \frac{(M_1 - M_2)^2}{16M_0}$.

(2) Pourcentage minimal : $0{,}23\frac{f_{t28}}{f_e} = 0{,}23\frac{2{,}1}{500} = 0{,}000966 = 0{,}0966$ %, soit pour b = 0,2 et d = 0,30 : 0,58 cm².

(3) Ce moment négatif nécessite des aciers supérieurs, mais les aciers de montage de la cage d'armature suffiront : 2HA6 = 0,57 cm² > $\frac{0{,}59 \times 10^{-3} \times 1{,}15 \times 10^4}{500 \times 0{,}28} = 0{,}05$ cm².

(4) Moment résistant = $A_s \frac{f_e}{1{,}15}\left(d - \frac{A_s f_e \times 1{,}5}{1{,}15 \times 2b \times 0{,}85 f_{c28}}\right)$.

(5) Pour des sections d'acier plus faibles, par exemple pour calculer le moment résistant d'un lit, on pourra le faire au prorata des sections d'acier. On va ainsi dans le sens de la sécurité, car le bras de levier est plus grand pour un moment plus faible. Exemple : appui 1 moment résistant du 1er lit (2 HA16) = $\frac{4{,}02}{7{,}10} \times 75{,}79$ = 42,91 kNm.

Pour les moments en travée, on pourrait faire une petite économie, moyennant un calcul plus compliqué en prenant le bras de levier de la section en Té qui est légèrement plus grand que celui de la section rectangulaire associée.

3.2.3. Efforts tranchants et aciers transversaux

Charge ELU : $p_u = 29{,}72$ kN/m
Portée : L = 5,0 m
Hauteur utile : $d = 0{,}30$ m
Largeur de l'âme : $b_o = 0{,}20$

	Unités	Travée 1		Travée 2		Travée 3	
		appui gauche	appui droit	appui gauche	appui droit	appui gauche	appui droit
p_u : cas de charge 1	kN/m	29,72	29,72	29,72	29,72	29,72	29,72
p_u : cas de charge 2	kN/m	29,72	29,72	16,66	16,66	29,72	29,72
p_u : cas de charge 3	kN/m	16,66	16,66	29,72	29,72	16,66	16,66
M_u : cas de charge 1	kNm	0	−73,43	−73,43	−55,95	−55,95	−55,95
M_u : cas de charge 2	kNm	0	−62,50	−62,50	−43,66	−43,66	−43,66
M_u : cas de charge 3	kNm	0	−52,09	−52,09	−43,66	−43,66	−43,66
V_{uiso} : cas de charge 1	kN	74,30	−74,30	74,30	−74,30	74,30	−74,30
V_{uiso} : cas de charge 2	kN	74,30	−74,30	41,65	−41,65	74,30	−74,30
V_{uiso} : cas de charge 3	kN	41,65	−41,65	74,30	−74,30	41,65	−41,65
$\Delta M_u/L$: cas de charge 1	kN	−14,69	−14,69	3,50	3,50	0,00	0,00
$\Delta M_u/L$: cas de charge 2	kN	−12,50	−12,50	3,77	3,77	0,00	0,00
$\Delta M_u/L$: cas de charge 3	kN	−10,42	−10,42	1,69	1,69	0,00	0,00
V_u : cas de charge 1	kN	59,61	−88,99	77,80	−70,80	74,30	−74,30
V_u : cas de charge 2	kN	61,80	−86,80	45,42	−37,88	74,30	−74,30
V_u : cas de charge 3	kN	31,23	−52,07	75,99	−72,61	41,65	−41,65
V_u maxi au nu de l'appui	kN	61,80	88,99	77,80	72,61	74,30	74,30
V_u à 5h/6 : cas de charge 1	kN	50,95	80,32	69,13	62,14	65,63	65,63
V_u à 5h/6 : cas de charge 2	kN	53,13	78,13	40,56	33,02	65,63	65,63
V_u à 5h/6 : cas de charge 3	kN	26,37	47,21	67,32	63,95	36,79	36,79
V_u maximum à $\frac{5h}{6}$: (1)	kN	53,13	80,32	69,13	63,95	65,63	65,63
Acier de glissement A_g : $\frac{(V_d+M_u/z)\gamma_s}{f_e}$							
cas 1	cm2	1,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
cas 2	cm2	1,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
cas 3	cm2	0,61	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A_g maximum	cm2	1,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

	Unités	Travée 1		Travée 2		Travée 3	
		appui gauche	appui droit	appui gauche	appui droit	appui gauche	appui droit
Cisaillement $\tau_u = \frac{V_d}{b_o d} \leq \frac{0{,}2 f_{c28}}{1{,}5} = 3{,}33$	MPa	0,886	1,339	1,152	1,066	1,094	1,094
Aciers transversaux : $\frac{A_t}{s} = \frac{\tau_u b_o \gamma_s}{0{,}9 f_e}$ (2) (3)	cm²/m	4,53	6,84	5,89	5,45	5,59	5,59
Diamètre acier HA (cadres)	mm	6	6	6	6	6	6
Espacement initial des cadres s_o	mm	125	83	96	104	101	101
arrondi à	mm	120	80	90	100	100	100

(1) Effort tranchant à l'abscisse $\frac{5h}{6}$: $V_d = | V_u | - \frac{5h}{6} p_u$.

(2) La reprise de bétonnage entre la retombée de poutre de 21 cm et la table de 14 cm ne nous autorise pas à déduire du cisaillement le terme $0{,}3 f_{t28}$.

(3) Acier transversal minimum = $\frac{0{,}4 b_o}{f_e} = \frac{0{,}4 \times 0{,}2 \times 10^4}{500} = 1{,}6$ cm²/m, soit un espacement de 300 mm pour un cadre HA6.

• Calcul des espacements des cadres

Nous garderons un espacement constant sur la longueur $\frac{5h}{6} = 0{,}292$ m, car l'effort tranchant y est constant du fait de la transmission directement à l'appui des charges situées près de l'appui, puis les espacements iront croissants suivant l'échelle généralisée de Caquot (7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35 ,60 cm) que l'on appliquera entier supérieur $\left(\frac{L}{2}\right) = 3$ fois.

Pour la première série, on disposera d'un nombre de cadres égal à : entier supérieur de $\left[\frac{5h - 0{,}05}{s_o} + \frac{L}{2}\right]$ soit entier supérieur de $\left[\frac{0{,}292 - 0{,}05}{0{,}11} + 2{,}5 = 4{,}70\right] = 5$ cadres du côté gauche (nous avons retenu la valeur de la série de Caquot égale à ou au-dessous de 12 cm, soit 11 cm) ;

et entier supérieur de $\left[\frac{0{,}292 - 0{,}05}{0{,}08} + 2{,}5 = 5{,}52\right] = 6$ cadres du côté droit.

Cotes en cm	Travée 1				Travée 2				Travée 3			
	Côté gauche		Côté droit		Côté gauche		Côté droit		Côté gauche		Côté droit	
	n × s	cu-mulé	n × s	cu-mulé	n × s	cu-mulé	n × s	cu-mulé	n × s	cu-mulé	n × s	cu-mulé
1er cadre	5		5		5		5		5		5	
	5 × 11	60	6 × 8	53	3 × 9	32	3 × 10	35	3 × 10	35	3 × 10	35
	3 × 13	99	3 × 9	80	3 × 10	62	3 × 11	68	3 × 11	68	3 × 11	68
	3 × 16	147	3 × 10	110	3 × 11	95	3 × 13	107	3 × 13	107	3 × 13	107
	3 × 20	207	3 × 11	143	3 × 13	134	3 × 16	155	3 × 16	155	3 × 16	155
	1 × 25	232	3 × 13	182	3 × 16	182	3 × 20	215	4 × 20	235	3 × 20	215
	1 × 18	250	3 × 16	230	3 × 20	242	1 × 20	235	1 × 25	260	1 × 25	240
			1 × 20	250		242	1 × 23	258				
Total=L=5m			500				500				500	
Nombre de cadres			39				36				34	

Remarques

1. En partant de chaque extrémité, on essaie d'arriver, non pas au milieu de la travée, mais d'avoir un écartement du même ordre de grandeur de chaque côté. La valeur restante, que l'on désigne généralement par la lettre x sur les plans de ferraillage n'est pas donnée. Ainsi, pour la première travée, x vaut 18 cm, mais on ne l'indiquera que par la lettre x.

Enrobage 15 mm, d'où les dimensions hors tout des cadres :
$a = b_n - 0{,}03 = 0{,}17$ m = 170 mm
$b = 0{,}35 - 0{,}03 = 0{,}32$ m = 320 mm.

Longueur développée des cadres (voir tome 3, en fin de chapitre 10) :
$L_c = 2\,(a + b) + 122 = 2\,(170 + 320) + 122 = 1102$ mm, arrondi à 1110 mm.

2. On peut économiser sur la quantité d'aciers transversaux en prenant la valeur moyenne de l'effort tranchant résistant au lieu de l'enveloppe.
Voir programme « ESCADRE » en annexe. Ainsi, en recalculant l'espacement nécessaire en fonction de l'effort tranchant après chaque série de L/2 cadres, ou bien en prenant un effort tranchant résistant moyen à cheval sur et non supérieur à) l'effort tranchant ultime, on trouve les résultats suivants :

Nombre de cadres	Liste de Caquot	Enveloppe supérieure	Valeur moyenne
Travée 1	39	36	33
Travée 2	36	35	32
Travée 3	34	34	32
Total	107	105	97

3.2.4. Épure d'arrêt des barres (Fig. 24)

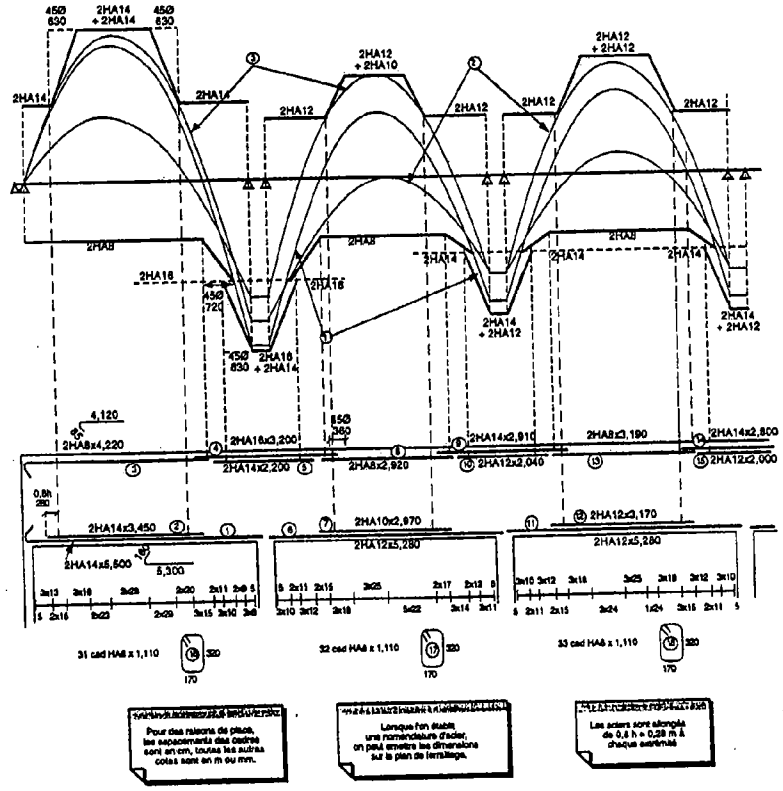


Fig. 24 – Epure d'arrêt des barres.

• **Nomenclature des aciers**

Repère	Nombre	Diamètre mm	Longueur développée m	Longueur hors tout	Largeur hors tout	Poids	Schéma
1	2	14	5,500	5,300	-	13,29	160 / 5,300
2	2	14	3,450	3,450	-	8,34	3,450
3	2	8	4,220	4,120	-	3,33	4,120 / 80
4	2	16	3,200	3,200	-	10,10	3,200
5	2	14	2,200	2,200	-	5,32	2,200
6	2	12	5,280	5,280	-	9,38	5,280
7	2	10	2,970	2,970	-	3,66	2,970
8	2	8	2,920	2,920	-	2,30	2,920
9	5	14	2,910	2,910	-	7,03	2,910
10	2	12	2,040	2,040	-	3,62	2,040
11	2	12	5,280	5,280	-	9,38	5,280
12	2	12	3,170	3,170	-	5,63	3,170
13	2	8	3,190	3,190	-	2,52	3,190
14	2	14	2,000	2,000	-	4,83	2,000
15	2	12	2,800	2,800	-	4,97	2,800
16	39	6	1,110	0,320	0,170	9,61	320 / 170
17	36	6	1,110	0,320	0,170	8,87	320 / 170
18	34	6	1,110	0,320	0,170	8,38	320 / 170
					Total	120,56	

Les longueurs des barres coudées et cadres peuvent être lues dans le tableau en fin de chapitre 10 du tome 3.

Le volume de béton des trois travées est de : $0,2 \times 0,35 \times (3 \times 5,2) = 1,092$ m^3. La quantité d'acier correspondante doit être diminuée de la moitié des aciers 14 et 15, soit 4,90 kg, ce qui représente une densité de $\frac{120,56 - 4,90}{1,092} = 105,9$ kg/m^3, dont 81,3 pour les aciers longitudinaux et 24,6 pour les aciers transversaux.

Remarque

Pour l'épure d'arrêt des barres supérieures, on peut utiliser deux méthodes, la deuxième étant légèrement plus compliquée, mais plus économique (Fig. 25).

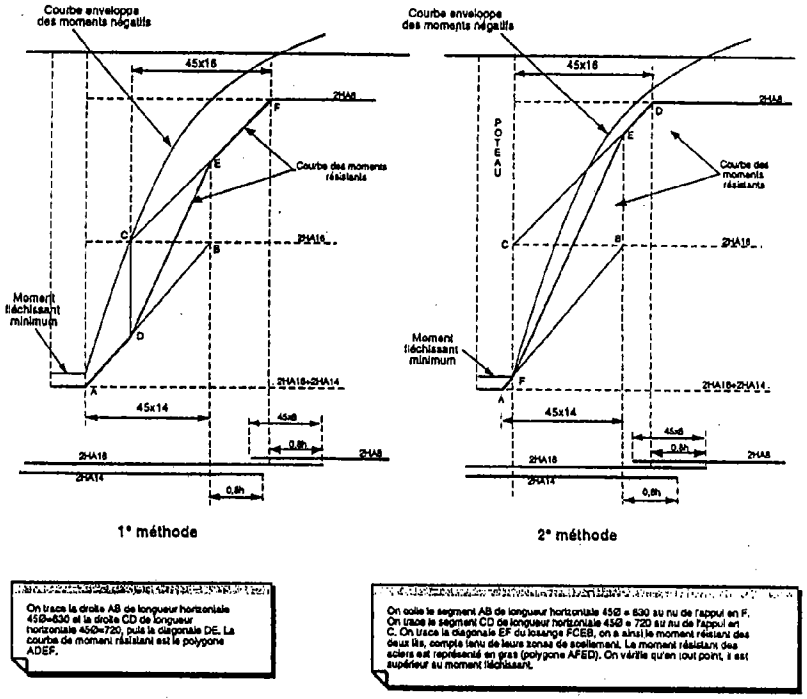

Courbe enveloppe des moments négatifs
45x16
2HA8
Courbe des moments résistants
2HA16
Moment fléchissant minimum
2HA16+2HA14
45x14
45x8
0,8h
2HA14
1° méthode
Courbe enveloppe des moments négatifs
45x16
2HA8
POTEAU
Courbe des moments résistants
2HA16
Moment fléchissant minimum
2HA16+2HA14
45x14
45x8
0,8h
2HA14
2° méthode
On trace la droite AB de longueur horizontale 45ß=630 et la droite CD de longueur horizontale 45ß=720, puis la diagonale DE. La courbe de moment résistant est le polygone ADEF.
On colle le segment AB de longueur horizontale 45ß = 630 au nu de l'appui en F. On trace le segment CD de longueur horizontale 45ß = 720 au nu de l'appui en C. On trace la diagonale EF du losange FCEB, on a ainsi le moment résistant des deux lits, compte tenu de leurs zones de scellement. Le moment résistant des aciers est représenté en gras (polygone AFED). On vérifie qu'en tout point, il est supérieur au moment fléchissant.

Fig. 25 – Arrêt des barres supérieures.

3.3. POTEAUX

Les charges supportées par les poteaux sont déterminées lors de la descente de charges, voir en 2.5.2 ci-dessus pour les valeurs de G et Q'.

Nous nous proposons d'étudier le poteau B2/B3.

• Poteaux B2/B3

Niveau		Unité	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Total
Diamètre	$\varnothing_p$	m	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	
Hauteur d'étage	H	m	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,60	
Charges permanentes	G	MN	0,2465	0,4095	0,5726	0,7357	0,8988	1,0619	1,2250	1,3881	1,5512	1,7172	
Charges variables dégressées	Q'	MN	0,0331	0,1490	0,2533	0,3460	0,4271	0,4967	0,5546	0,6125	0,6705	0,7284	
Charge ELU = 1,35G + 1,5Q'	N_u	MN	0,3824	0,7763	1,1530	1,5122	1,8540	2,1786	2,4857	2,7927	3,0999	3,4108	
Rayon de giration = 0,25 Øp	i	m	0,1375	0,1375	0,1375	0,1375	0,1375	0,1375	0,1375	0,1375	0,1375	0,1375	
Coefficient de flambement (1)	k		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	
Longueur de flambement = k H	L_f	m	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,60	
Elancement $= \frac{L_f}{i}$	λ		22,55	22,55	22,55	22,55	22,55	22,55	22,55	22,55	22,55	26,18	
$\frac{0,85}{1 + 0,2\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2}$	α		0,7849	0,7849	0,7849	0,7849	0,7849	0,7849	0,7849	0,7849	0,7849	0,7644	
Acier (2)	A_s	cm^2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	8,65	
% minimum (3)		cm^2	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	
Acier retenu		cm^2	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	6,91	8,65	
Diamètre calculé	Ø	mm	12,1	12,1	12,1	12,1	12,1	12,1	12,1	12,1	12,1	13,6	
nombre de barres (4)			6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
soit 6 barres de diamètre	Ø	mm	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	
Acier mis en place		cm^2	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	
Longueur totale des aciers		m	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	25,38	
Poids aciers longitudinaux		kg	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	30,67	274,1
Acier transversal = Ø / 3	$Ø_t$	mm	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	

Niveau		Unité	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Total
Espacements des cadres	s	m	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	
Longueur cadres	L_t	m	2,242	2,242	2,242	2,242	2,242	2,242	2,242	2,242	2,242	2,242	
Nombre cadres (5)		15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	17	152
Poids aciers transversaux		kg	7,46	7,46	7,46	7,46	7,46	7,46	7,46	7,46	7,46	8,46	75,6
Poids total aciers		kg	34,51	34,51	34,51	34,51	34,51	34,51	34,51	34,51	34,51	39,13	349,7
Volume béton hors dalle		m^3	0,703	0,703	0,703	0,703	0,703	0,703	0,703	0,703	0,703	0,822	7,2
Densité d'acier		kg/m^3	49,07	49,07	49,07	49,07	49,07	49,07	49,07	49,07	49,07	47,60	48,90
Coût (6)		U	76,7	76,7	76,7	76,7	76,7	76,7	76,7	76,7	76,7	88,4	778,8

(1) L'inertie des poutres est faible par rapport à celle des poteaux, la longueur de flambement peut être prise égale à la hauteur d'étage. On a vu que l'on fait une économie appréciable en calculant la longueur de flambement par une méthode plus précise (voir tome 3, chapitre 8, art 2.7.5 et 2.7.6).

(2) De la formule du BAEL : $N_u = \alpha \left[\frac{B' f_{c28}}{0,9\gamma_b} + \frac{A_s f_e}{\gamma_s}\right]$, on tire $A_s = \left[\frac{N_u}{\alpha} - \frac{B' f_{c28}}{0,9\gamma_s}\right] \frac{\gamma_s}{f_e}$ avec

$$B' = \frac{\pi(\varnothing_p - 0,02)^2}{4}.$$

(3) Maximum de 0,2 % et de 4 cm^2 par mètre de parement.

(4) Pour une section circulaire, le nombre de barres, au minimum de 6, est tel que la distance entre deux barres n'excède pas 0,40 m et Ø + 0,10 m.

(5) On dispose de 3 cadres sur la hauteur de recouvrement des attentes, soit sur 27 Ø.

(6) Pour comparer différentes solutions, on peut prendre comme unité de coût le prix d'un kg d'acier et estimer le prix d'un m^3 de béton égal à 60 unités.

On trouve une densité d'acier de 48,9 kg/m^3, ce qui est relativement peu pour des poteaux ; cela vient du fait que tous, sauf un, sont au pourcentage minimal.

On peut se poser la question de savoir si l'on a choisi le diamètre optimal pour les poteaux. En effet, on constate que tous les niveaux sauf le rez-de-chaussée sont au pourcentage minimal. On rappelle que l'on avait dimensionné le poteau en 2.1 ci-dessus en prenant les charges du 2e niveau pour garder la même section du niveau 0 au niveau 9.

Le fait d'avoir effectué le calcul du poteau ci-dessus sur un tableur nous permet de simuler les résultats avec d'autres diamètres et de comparer les coûts obtenus.

Pour un diamètre de 50 cm au lieu de 55 cm, on obtient les résultats suivants :

Niveau		Unité	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Total
Diamètre	$\varnothing_p$	m	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	
Hauteur d'étage	H	m	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,60	
Charges permanentes	G	MN	0,2465	0,4095	0,5726	0,7357	0,8988	1,0619	1,2250	1,3881	1,5512	1,7172	
Charges variables dégressées	Q'	MN	0,0331	0,1490	0,2533	0,3460	0,4271	0,4967	0,5546	0,6125	0,6705	0,7284	
Charge ELU = 1,35G + 1,5Q'	N_u	MN	0,3824	0,7763	1,1530	1,5122	1,8540	2,1786	2,4857	2,7927	3,0999	3,4108	
Rayon de giration = 0,25 Øp	i	m	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	
Coefficient de flambement (1)	k		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	
Longueur de flambement = k H	L_f	m	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,60	
Elancement $= \frac{L_f}{i}$	λ		24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	28,80	
$\frac{0,85}{1 + 0,2\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2}$	α		0,7724	0,7724	0,7724	0,7724	0,7724	0,7724	0,7724	0,7724	0,7724	0,7486	
Acier (2)	A_s	cm^2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6,08	15,23	27,72	
% minimum (3)		cm^2	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	
Acier retenu		cm^2	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	15,23	27,72	
Diamètre calculé	Ø	mm	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	18,0	24,3	
nombre de barres (4)			6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
soit 6 barres de diamètre	Ø	mm	14	14	14	14	14	14	14	14	20	25	
Acier mis en place		cm^2	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	9,24	18,85	29,45	
Longueur totale des aciers		m	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	22,38	24	28,35	
Poids aciers longitudinaux		kg	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	27,04	59,19	109,24	384,8
Acier transversal = Ø/3	$\varnothing_t$	mm	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8	
Espacements des cadres	s	m	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,300	0,375	
Longueur cadres	L_t	m	2,085	2,085	2,085	2,085	2,085	2,085	2,085	2,085	2,345	2,562	

Niveau		Unité	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Total
Nombre cadres (5)		15	15	15	15	15	15	15	15	15	11	10	141
Poids aciers transversaux		kg	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	10,18	10,11	75,8
Poids total aciers		kg	33,98	33,98	33,98	33,98	33,98	33,98	33,98	33,98	69,37	119,35	460,6
Volume béton hors dalle		m^3	0,581	0,581	0,581	0,581	0,581	0,581	0,581	0,581	0,581	0,679	5,9
Densité d'acier		kg/m^3	58,47	58,47	58,47	58,47	58,47	58,47	58,47	58,47	119,35	175,68	77,93
Coût (6)		U	68,9	68,9	68,9	68,9	68,9	68,9	68,9	68,9	104,2	160,1	815,2

On constate que le coût est plus élevé de (815,2 – 778,8) = 36,4 U (plus d'acier et moins de béton) et l'on devrait aussi rajouter le béton des poutres devenues plus longues de 5 cm : 0,05 m × 0,2 m × 0,2 m × 10 niveaux = 0,02 m^3 ; les aciers des poutres dont la portée a été augmentée de 1 %, soit 2 % pour les aciers longitudinaux (que l'on suppose proportionnels au carré de la portée) et 1 % pour les aciers transversaux :
2 % de 0,2 m × 0,35 m × 5 m × 10 niveaux × 81,3 kg/m^3 = 5,7 kg et
1 % de 0,2 m × 0,35 m × 5 m × 10 niveaux × 24,6 kg/m^3 = 0,9 kg, soit 6,6 U.

Le surcoût est de 43 U sur un total de 778,8, soit +5,5 %.

De même, en choisissant un diamètre supérieur de 0,60 m, on trouverait un surcoût de :
865,6 – 6,6 = 859 U, soit +10,3 %.

Le choix de 0,55 m de diamètre est bien le plus économique.

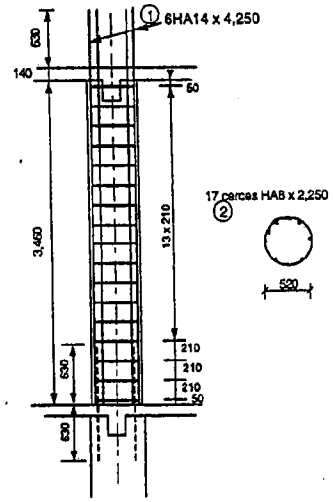


Fig. 26 – Poteau B2/B3. Niveau 0. Ferraillage.

• **Nomenclature des aciers**

Repère	Nombre	Diamètre mm	Longueur développée m	Longueur hors tout	Largeur hors tout	Poids	Schéma
1	6	14	4,250	4,250	-	30,81	4,250
2	17	6	2,250	0,520	0,520	8,49	520
					Total	39,30	

3.4. SEMELLES

3.4.1. Charges

Données dé la semelle B2/B3 :
- semelle carrée plate : 2,60 m × 2,60 m × 0,55 m ;
- contrainte caractéristique du sol en ELU à 1 m. sous le niveau du sol fini du 3e sous-sol : q_u = 1,4 MPa, d'où la contrainte de calcul : $q = 0{,}5\ q_u = 0{,}7$ MPa en ELU ;
- charge permanente au niveau du sol fini du 3e sous-sol : G = 2,2192 MN ;
- charge variable à ce même niveau : Q = 1,0181 MN.

• **Charges de calcul**

	Poids volumique kN/m³	Hauteur m	Charge au m² kN/m2	Aire horizontale m²	Volume m³	Poids kN
Poteau	24,5	0,45	11,025	0,6 × 0,6 = 0,36	0,162	3,969
Dallage	24,5	0,15	3,675	2,6 × 2,6 − 0,6 × 0,6 = 6,40	0,96	23,52
Sol	18,0	0,30	5,400	6,40	1,92	34,56
Semelle	24,5	0,55	13,475	2,6 × 2,6 = 6,76	3,718	91,091
Total			q_1 = 33,575			153,14

Charge de calcul ELU sur le sol : $P_u = 1{,}35\ (2{,}2192 + 0{,}15314) + 1{,}5 \times 1{,}0181 = 4{,}73$ MN

La charge de dallage, de terre, d'une partie du poteau enterré et de semelle est répartie sur toute la surface de la semelle. Elle est équilibrée directement par une charge répartie égale due à la réaction du sol. Elle vient donc en déduction de la charge de calcul des aciers.

Charge de calcul des aciers : $P'_u = P_u - 1{,}35 \times A \times B \times q_1 = 4{,}424$ MN.

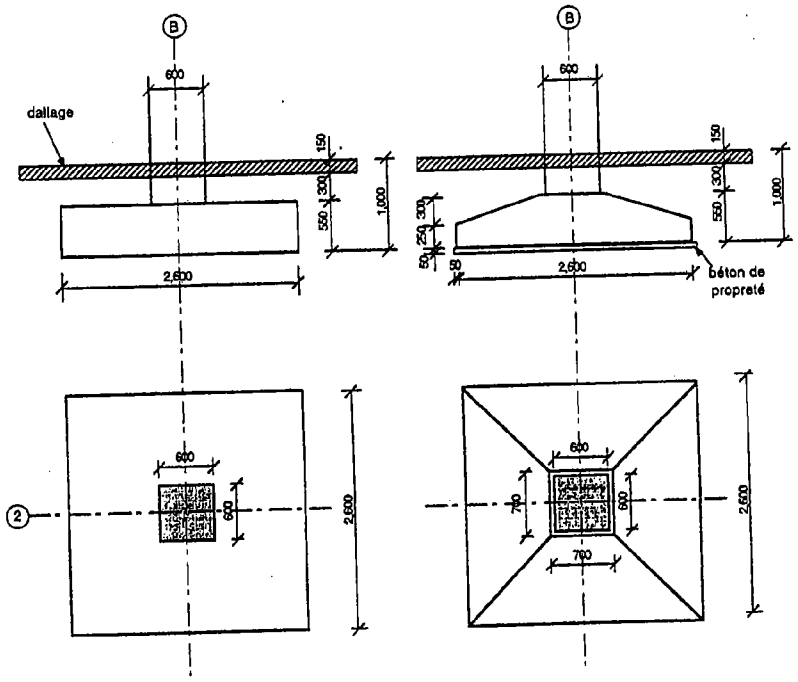


Fig. 27 – Semelle B2/B3. Coffrage. Semelle plate ou semelle tronconique en variante.

On a représenté les deux cas de semelle plate et de semelle tronconique. Le choix est à proposer au chantier en fonction de considérations économiques et de facilité de mise en œuvre.

Pour la semelle tronconique, on prévoit :

– une partie verticale de hauteur $h_1 = \text{Max}\left[\frac{h}{4} ; 12\,\varnothing + 0{,}06\text{ m} ; 0{,}20\text{ m}\right]$

$h_1 = \text{Max}\,[0{,}138 ; 0{,}228 ; 0{,}20] = 0{,}23\text{ m}$ arrondi à 0,25 m ;

– une partie horizontale en pied de poteau de 5 cm de débord pour servir d'assise au coffrage du poteau.

3.4.2. Vérification de la contrainte du sol

Charge de calcul ELU sur le sol : $P_u = 1{,}35\,(2{,}219\,2 + 0{,}153\,14) + 1{,}5 \times 1{,}0181 = 4{,}73$ MN.

Charge de calcul des aciers : $P'_u = P_u - 1{,}35 \times A \times B \times q_1 = 4{,}424$ MN.

$$\sigma = \frac{P'_u}{S} = \frac{4{,}73}{2{,}6^2} = 0{,}699\,7\text{ MPa} < 0{,}7\text{ MPa} \quad \text{OK}$$

3.4.3. Calcul des aciers

En l'absence de moment de flexion, nous utiliserons la méthode des bielles du DTU 13.2.

Hauteur utile dans les deux directions :

$d_1 = 0{,}55 - 0{,}03$ (enrobage) $- 0{,}01$ (demi-diamètre) $= 0{,}51$ m

$d_2 = d_1 - \varnothing = 0{,}49$ m

$$A_s = \frac{P'_u\,(A - a)\,\gamma_s}{8\,df_e} = \frac{4{,}424 \times (2{,}6 - 0{,}6) \times 1{,}15 \times 10^4}{8 \times 0{,}49 \times 500} = 51{,}91\text{ cm}^2$$

soit 17 HA20 (= 53,40 cm^2) dans les deux directions.

On prendra un enrobage de 3 cm pour les bétons au contact de la terre.

En l'absence de moment de flexion en pied de poteau, nous ne disposerons que des aciers de tirant et des attentes pour le poteau (Fig. 28).

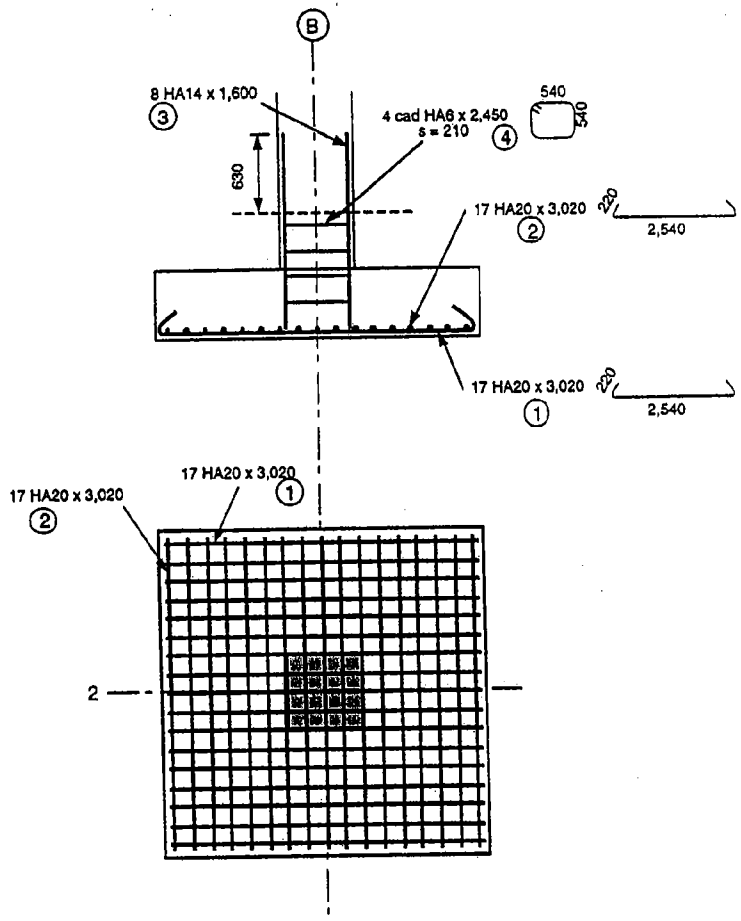


Fig. 28 – Semelle B2/B3. Ferraillage.

Nomenclature des aciers

Repère	Nombre	Diamètre mm	Longueur développée m	Longueur hors tout m	Largeur hors tout m	Poids kg	Schéma
1	17	20	3,020	2,540		126,61	2,540
2	17	20	3,020	2,540		126,61	2,540
3	8	14	1,600	1,600	-	15,47	1,600
4	4	6	2,540	0,540	0,540	2,18	540 / 540
					Total	270,87	

Quantités

		Poteau enterré	Semelle
Volume béton	m^3	0,6 × 0,6 × 0,45 = 0,162	2,6 × 2,6 × 0,55 = 3,718
Quantité d'acier	kg	17,65	253,22
Densité d'acier au m^3	kg/m^3	109,1	68,1

Remarque

Pour une semelle tronconique, le volume de béton est donnée par :

$$V = A\,B\,h_1 + \frac{h - h_1}{6}\,(A\,B + a\,b + 2\,a\,b + 2\,A\,B)$$

$$V = 2,6 \times 2,6 \times 0,25 + \frac{0,30}{6}\,(2,6 \times 0,6 + 0,6 \times 2,6 + 2 \times 0,6 \times 0,6 + 2 \times 2,6 \times 2,6) = 2,558\ m^3$$

d'où une densité de 99 kg/m^3 avec la même quantité d'acier.

3.5. VOILES

Nous avons vu en 2.7 ci-dessus que les sollicitations dues aux charges gravitaires et au vent ne nécessitaient pas de ferrailler les voiles autrement que pour des raisons hygrothermiques (voir tome 3, chapitre 10, §. 3.1 et 3.3).

Nous étudierons le voile pignon en superstructure (au-dessus du sol).

Nous devons disposer (Fig. 29) :

- des aciers de chaînages horizontaux dans les planchers CH : $1,5\,\frac{400}{f_e} = 1,2\ cm^2$ soit 2 HA10
- des aciers de chaînages verticaux dans le dernier niveau CV : $1,5\,\frac{400}{f_e} = 1,2\ cm^2$ soit 2 HA10
- d'un quadrillage de peau, côté extérieur, à 30 mm de la paroi, constitué de $0,6\,\frac{400}{f_e} = 0,48\ cm^2$ soit HA6, s = 500 verticalement et de $1,2\,\frac{400}{f_e} = 0,96\ cm^2$ soit HA6, s = 290 horizontalement.

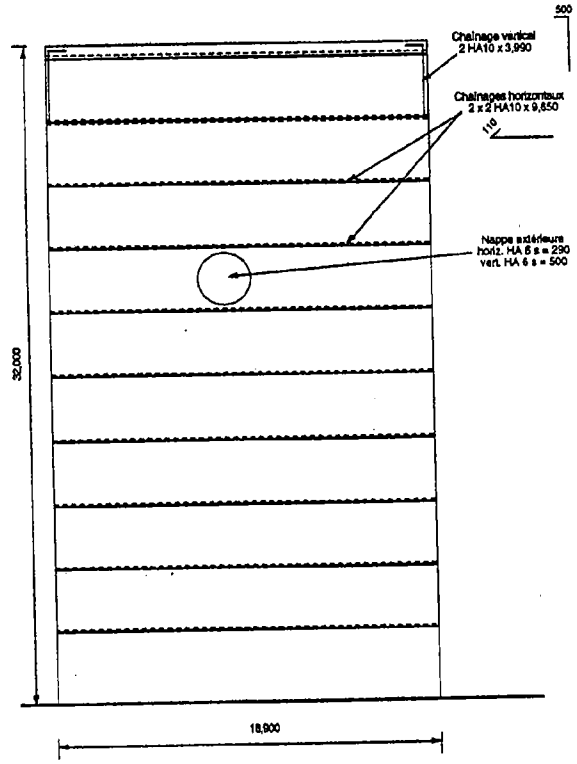


Fig. 29 – Voile de pignon. Ferraillage.

Remarque

Le voile en sous-sol jouera le rôle de mur de soutènement , fonctionnant comme une dalle continue verticale de 3 travées. (Voir Tome 5*, chapitre 16 « Murs de soutènement »).

3.6. ÉLÉMENTS PARTICULIERS

3.6.1 Cas particulier - Panneau de dalle entre les axes B3-B3 et C2-C3

La présence de trémies importantes le long de l'axe C ne permet pas à la dalle d'être considérée comme appuyée sur ses 4 côtés (Fig. 30).

De plus, elle supporte des charges linéaires dues aux cloisons de parpaing situées le long de ces trémies.

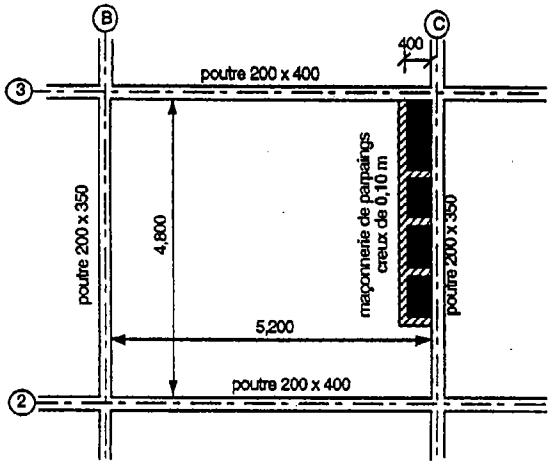


Fig. 30 – Dalle entre axes B2-B3 et C2-C3.

A défaut de formulaire pour ce type de dalle et de chargement, nous pouvons utiliser la méthode des lignes de rupture en considérant la dalle appuyée sur 3 côtés et soumise à une charge linéaire sur le quatrième.

* A paraître

Dimensions de la dalle : 4,800 × 4,800 m, en négligeant le morceau de dalle en bas à droite de 40 cm.
Charges permanentes de dalle type 1 : $g = 4{,}024$ kN/m^2 (voir en en 1.3 ci-dessus).
Charges d'exploitation : $q = 3{,}5$ kN/m^2.
Charge répartie ELU : $p = 1{,}35\,g + 1{,}5\,q = 10{,}682$ kN/m^2.
Charge linéaire (voir tome 1, chapitre 3, §. 1.1.2) : P = 1,35 × 0,10 m × 2,96 m × 13,25 kN/m^3 = 3,922 kN/m que l'on appliquera sur toute la longueur de 4,80 m, ce qui va dans le sens de la sécurité.

Nous considérerons que la section d'acier en chapeau vaut 1,16 cm^2 pour le moment M et 1,13 cm^2 pour le moment M', pour reprendre les mêmes valeurs que celles des dalles courantes.

Soient A_s et μA_s les sections d'aciers inférieurs parallèles à Ox et à Oy et correspondant aux moments inconnus m et μm (Fig. 31).

Le moment résistant ELU pour une section d'acier A_s est donné par :

$$M = \frac{A_s f_e}{1{,}15}\left(d - \frac{1{,}5\,A_s f_e}{1{,}15 \times 2 \times b \times 0{,}85 f_{c28}}\right), \text{ soit}$$

avec $b = 1$ m ; $d = 0{,}12$ m ; f_e 500 ; $f_{c28} = 25$

M = 5,96 kNm pour $A_s = 1{,}16$ cm^2 et M' = 5,86 kNm pour $A'_s = 1{,}13$ cm^2.

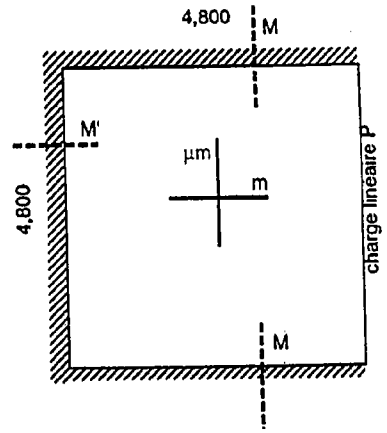


Fig. 31 – Dalle entre axes B2-B3 et C2-C3. Principe du ferraillage.

Nous devons considérer deux schémas de rupture possible (Fig.32).

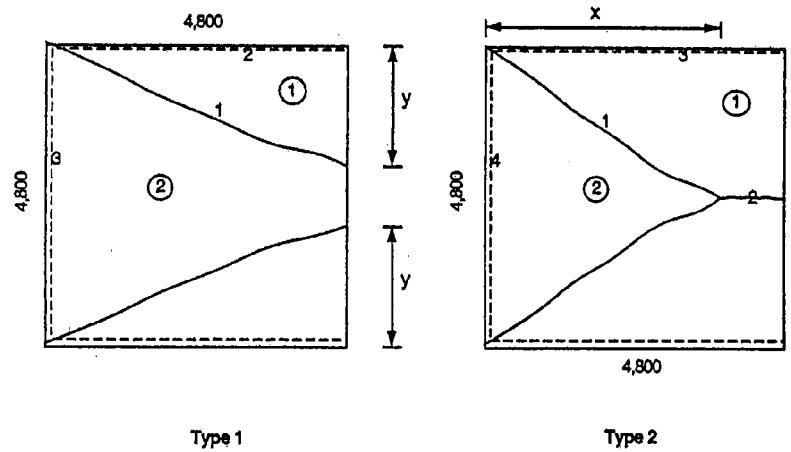


Fig. 32 – Types de rupture par la méthode des lignes de rupture.

• **Type 1 - Travail interne**

n° fissure	Nbre de fissures	Longueur // à : Ox pour aciers // à Oy Oy pour aciers // à Ox	Rotation aciers : // à Oy // à Ox	Moment	W_i
1	2 2	a y	δ/y δ/a	μ m m	$K_1 m = 2 a \mu m \delta/y$ $K_2 m = 2 y m \delta/a$
2	2 2	a 0	δ/y -	M -	$K_3 = 2 a m \delta/y$ -
3	1 1	0 b	δ/a -	- M	- $K_4 = b M' \delta/a$

• **Type 1 - Travail externe**

n° de la plaque	Nbre de plaques	Aire plaque ou longueur charge linéaire	Charge	Déplacement du cdg	W_e
1	2	ay/2	p	δ/3	p a y δ/3
2	2 1	ay/2 (b – 2y) a	p p	δ/3 δ/2	p a y δ/3 p a (b – 2y) δ/2
bord	2 1	y b – 2y	P P	δ/2 δ	P y δ (b – 2y) P δ
				Total =	W_e

D'où l'on tire : $m = \dfrac{W_e - K_3 - K_4}{K_1 + K_2}$

De même pour le type 2.

• **Type 2 - Travail interne**

n° fissure	Nbre de fissures	Longueur // à : Ox pour aciers // à Oy Oy pour aciers // à Ox	Rotation aciers : // à Oy // à Ox	Moment	W_i
1	1 1	a – x 0	2 δ / b -	μ m	$K_1 m = 2 (a-x) \delta \mu m/b$ -
2	2 2	x b / 2	2 δ / b δ / x	μ m m	$K_2 m = 4 x \delta \mu m / b$ $K_3 m = b \delta m / x$
3	2 2	a 0	2 δ / b -	M -	$K_4 = 4 a \delta m / b$ -
4	2 2	0 b	- δ / x	- M'	- $K_5 = 2 b \delta M' / a$

• **Type 2 - Travail externe**

n° de la plaque	Nbre de plaques	Aire plaque ou longueur charge linéaire	Charge	Déplacement du cdg	W_e
1	2 2	b x/4 (a – x) b/2	p p	δ/3 δ/2	p b x δ/3 p a b δ/2 – p b x δ/2
2	1	b x/2	p	δ/3	p b x δ/6
bord	2	b/2	P	δ/2	P b δ/2
				Total =	W_e

D'où l'on tire : $m = \dfrac{W_e - K_4 - K_5}{K_1 + K_2 + K_3}$

Nous utiliserons un tableur pour trouver, par tâtonnements successifs la valeur des paramètres x et y donnant le moment minimal.

a	4,8	m
b	4,8	m
d	0,12	m
p	10,682	kN/m²
P	3,922	kN/m
f_{c28}	25	MPa
f_e	500	MPa
m	4	
A_s	1,16	cm²
M	5,96	kN/m
A'_s	1,14	cm²
M'	5,86	kN/m

• **Type 1 - Travail interne**

n° fissure	Nbre de fissures	Longueur // à :
		Ox pour aciers // à Oy
		Oy pour aciers // à Ox
			Rotation aciers :
			// à Oy
			// à Ox
				Moment	W_i

1	2 2	4,8 2,4	0,416667 0,208333	4 m m	16 1
2	2 2	4,8 0	0,416667 -	5,96 -	23,85 -
3	1 1	0 4,8	- 0,208333	- 5,861	- 5,861

• **Type 1 - Travail externe**

n° de la plaque	Nbre de plaques	Aire plaque ou longueur charge linéaire	Charge	Déplacement du cdg	W_e
1	2	5,76	10,682	0,33333	41,02
2	2	5,76	10,682	0,33333	41,02
2	1	0	10,682	0,5	0
P	2	2,34	3,922	0,5	9,413
P	1	0	3,922	1	0
				Total =	91,451

Résultat donnant le moment m maximal, le coût est donné par : $(1 + \mu)\, m$

y m	2,400 3,6318
Coût	18,16

Le moment maximal étant donné pour la valeur maximum $y = b/2 = 2{,}4$ m, le type 2 doit être plus défavorable.

• **Type 2 - Travail interne**

n° fissure	Nbre de fissures	Longueur // à : Ox pour aciers // à Oy Oy pour aciers // à Ox	Rotation aciers : // à Oy // à Ox	Moment	W_i
1	1 1	3,05 0	0,416667 -	4 m -	5,08333
2	2 2	1,75 2,4	0,416667 0,571429	4 m m	5,08333 2,74286
3	2 2	4,8 0	0,416667 -	5,962397 -	23,8496 -
4	1 1	0 4,8	- 0,571429	- 5,861119	- 16,0762

• **Type 2 - Travail externe**

n° de la plaque	Nbre de plaques	Aire plaque ou longueur charge linéaire	Charge	Déplacement du cdg	W_e
1	2	2,1	10,682	0,33333	14,9548
1	2	7,32	10,682	0,5	78,1922
2	1	4,2	10,682	0,33333	14,9548
P	2	2,4	3,922	0,5	9,4128
				Total =	117,515

D'où l'on tire : $m = \dfrac{W_e - K_4 - K_5}{K_1 + K_2 + K_3} = \dfrac{117{,}515 - 23{,}849\,6 - 16{,}076\,2}{5{,}083\,33 + 5{,}833\,33 + 2{,}742\,86} = 5{,}680\,2.$

x m	1,750 5,6802
Coût	28,4

On peut essayer différentes valeurs de m pour en rechercher la valeur optimale, c'est-à-dire le coût minimal.

On trouve :

μ	m_{max}	x	coût
1	15,332	2,61	30,66
2	9,617	2,12	28,85
3	7,116 3	1,89	28,47
4	5,680 2	1,75	28,40

On constate que le coût varie peu et que l'on peut par exemple prendre un moment relatif $\mu = 2$.

A un moment $m = 9{,}617$ kNm, correspond une section :

$$\mu_1 = \frac{M}{d^2 \sigma_{bu}} = \frac{9{,}617 \times 10^{-3}}{0{,}12^2 \times 14{,}17} = 0{,}047 < 0{,}37$$

$$z = 0{,}5\ (1 + \sqrt{1 - 2\mu_1}) = 0{,}1171 \text{ m}$$

$$A_{sx} = \frac{M}{z\sigma_s} = \frac{6{,}917 \times 10^{-3} \times 1{,}15 \times 10^4}{0{,}117\,1 \times 500} = 1{,}36 \text{ cm}^2/\text{m}, \quad \text{soit HA6}, \quad s = 200$$

et $A_{sy} = \mu\, A_{sx} = 2{,}72 \text{ cm}^2/\text{m}$, soit HA8, $s = 180$

On disposera de renforts autour des trémies. En particulier les trois séparateurs dans lesquels on disposera de deux barres HA10 en haut et en bas. En effet, la flèche maximale de la dalle a lieu au droit de la trémie, à mi-portée. Le séparateur se comporte comme une poutre soumise à une double courbure, donc à un moment positif et à un moment négatif (Fig. 34).

Remarque
Un ferraillage symétrique 2 HA10 en haut et 2 HA10 en bas entraîne une plastification des aciers tendus et pas des aciers comprimés ni du béton comprimé pour respecter l'équilibre des forces.

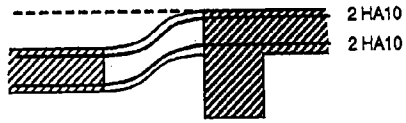


Fig. 33 – Séparateur de trémies.

On disposera également de chapeaux dans la partie inférieure droite de la figure : HA 6, $s = 250$.

La longueur des chapeaux est prise forfaitairement égale à 0,2 L, car nous ne sommes pas en présence d'une dalle appuyée sur ses 4 côtés et ne pouvons donc appliquer la méthode utilisée plus haut.

Le ferraillage du panneau est représenté sur la figure 34.

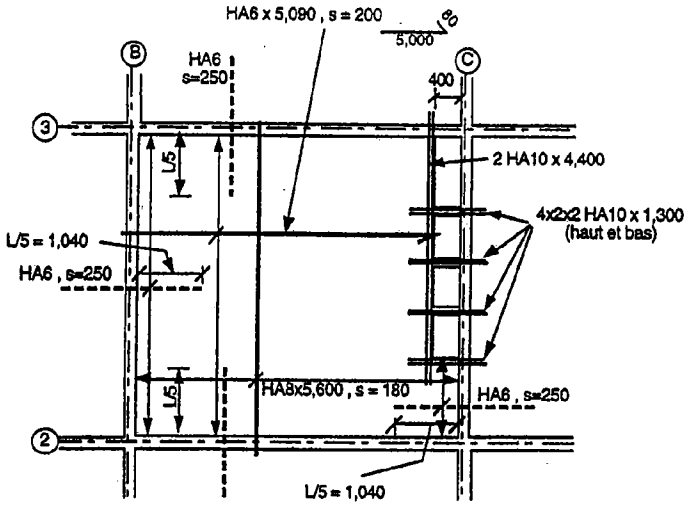


Fig. 34 – Panneau B-C/2-3. Ferraillage.

Bibliographie

[1] H. THONIER - Le Projet de béton armé, SEBTP, 1995.

[2] Norme NF P 06-001 - Charges d'exploitation des bâtiments.

[3] Norme NF P 02-001 - Dessin de bâtiments et génie civil. Principes généraux.

[4] Norme NF P 02-005 - Dessin de bâtiments et génie civil. Cotations.

[5] Norme NF P 02-015 - Dessin de bâtiments et génie civil. Dessins d'armatures.

[6] Norme NF P 02-016 - Dessin de bâtiments et génie civil. Armatures industrielles pour béton armé.

ANNEXES

ANNEXE A

PROGRAMME « ESCADRE » *

Ce programme permet de déterminer les espacements successifs des cadres d'une travée de poutre soumise à des charges réparties uniformes, suivant trois méthodes au choix :
- liste des espacements de Caquot (6, 7, 8, 9,10, 11 ,13 ,16 ,20 ,25, 35, 60) ;
- courbe en escalier des efforts tranchants résistants enveloppe supérieure des courbes d'ef-forts tranchants ultimes ;
- courbe en escalier des efforts tranchants résistants à cheval sur la courbe d'effort tranchant ultime maximal ;

Les efforts tranchants sont calculés à partir de la charge ultime p_u et des moments sur appuis à gauche et à droite de chaque cas de charge.

La méthode s'apparente à celle qui est décrite au chapitre 12 « Bielles et Tirants » à la différence près que la moyenne se fait sur la valeur de l'effort tranchant et non sur les espacements.

Calcul des espacements des cadres de poutres

La série des espacements de Caquot est pratique d'utilisation, mais peu précise et pas toujours économique, car elle enveloppe par escalier la courbe d'effort tranchant « par dessus ».
Or, nous avons vu au chapitre 12 « Bielles et Tirants » que l'on peut, tout en restant dans le domaine de sécurité, prendre un effort tranchant résistant en escalier à cheval sur la courbe d'effort tranchant et non sytématiquement au-dessus.

1. RELATIONS UTILES

Section d'acier transversal par unité de longueur :

$$\frac{A_t}{s} = \frac{b_0 \gamma_s (\tau_u - 0{,}3\, k f_{t28})}{0{,}9\, f_e} = \frac{b_0 \gamma_s \left(\frac{V}{b_0 d} - 0{,}3\, k f_{t28} \right)}{0{,}9 f_e} = \frac{V \gamma_s}{0{,}9\, d f_e} - \frac{k f_{t28}\, \gamma_s b_0}{3\, f_e}$$

d'où l'on tire : $V = \frac{0{,}9\, d f_e}{\gamma_s} \frac{A_t}{s} + 0{,}3\, k f_{t28}\, b_0\, d$

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées

ou : $s = \dfrac{0{,}9\, df_e}{\gamma_s}\dfrac{A_t}{s} + 0{,}3\, kf_{t28}\, b_o\, d$.

Pourcentage minimal

$\left(\dfrac{A_t}{s}\right)_{min} = \dfrac{0{,}4\, b_o}{f_e}$ qui corrrespond à un effort tranchant : $V_{min1} = \left(\dfrac{0{,}36}{\gamma_s} + 0{,}3\, kf_{t28}\right) b_o d$ ou

à un espacement $s = \dfrac{f_e\, A_t}{0{,}4\, b_o}$.

Espacement maximal

s_{max} = Min [0,9d ; 0,40 m] qui corrrespond à un effort tranchant :

$V_{min\,2} = \dfrac{0{,}9\, df_e}{\gamma_s\, s_{max}}\dfrac{A_t}{} + 0{,}3\, kf_{t28}\, b_o\, d$ et $V_{min} = \text{Max}[V_{min1} ; V_{min2}]$.

2. PRINCIPE DE CALCUL

Positionner le 1er cadre à 50 mm du nu de l'appui (Fig. 1).

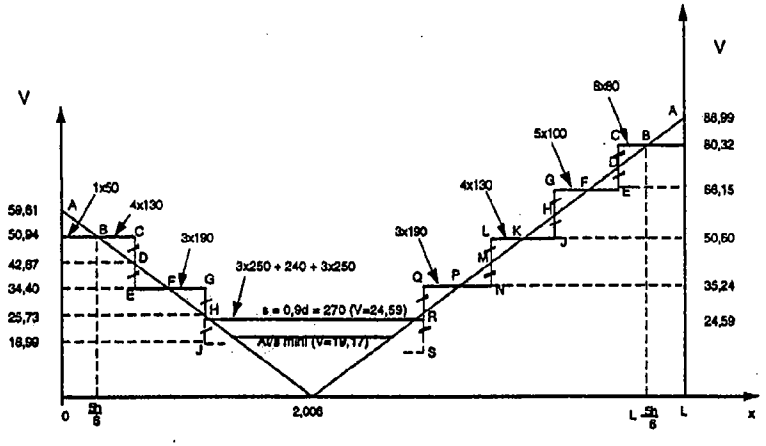


Fig. 1 – Ecartements des cadres de poutres.

Calculer la section d'acier $\dfrac{A_t}{s}$ à l'abscisse $x_B = \dfrac{5h}{6}$ (pour tenir compte de la transmission directe des charges près des appuis dans l'appui) et pour une section d'acier choisie A_t, l'écartement s_o des premiers cadres.

Appliquer cet écartement sur la longueur $\dfrac{5h}{6}$ puis $\dfrac{L}{2}$ fois, soit n_o = entier supérieur $\left[\dfrac{5}{6}\dfrac{h}{s_o} ; \dfrac{L}{2}\right]$ d'où l'abscisse du point C : $x_C = 0{,}050 + n_o\, s_o$.

Déterminer l'effort tranchant V_D correspondant à l'abscisse $x_D = x_C$: $V_D = V_A - p_u\, x_C$ pour une charge répartie uniforme p_u.

Calculer l'effort tranchant en F : $V_F = V_E = V_C - 2\,(V_D - V_C)$.

Calculer l'écartement s_1 correspondant à V_F et la longueur EF = $\dfrac{V_D - V_E}{p_u}$.

Le nombre d'écartement suivants n_1 est donné par : s_1 = entier supérieur [2 x longueur EF].

Déterminer l'abscisse de G : $x_G = 0{,}05 + n_o\, s_o + n_1\, s_1$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre l'effort tranchant Vmin à partir duquel l'écartement sera constant jusqu'à rencontrer l'écartement calculé à partir de l'autre extrémité.

3. APPLICATION

3.1. DONNÉES

$b_o = 0{,}2$ m ; $d = 0{,}3$ m ; $h = 0{,}35$ m ; L = 5,00 m

$p_u = 29{,}72$ kN/m ; $M_R = 0$; $M_d = -73{,}43$ kNm

$f_{c28} = 25$ MPa ; $f_e = 500$ MPa

Reprise de bétonnage : $k = 0$

Pourcentage minimal :

$V_{min1} = \left(\dfrac{0{,}36}{\gamma_s} + 0{,}3\, kf_{t28}\right) b_o\, d = \dfrac{0{,}36}{1{,}15} \times 0{,}2 \times 0{,}3 \times 10^3 = 18{,}78$ kN qui correspond à un espacement de 0,354 m, d'où s_{min} = Min [0,9 d ; 0,354] = 0,27 m.

3.2. CÔTÉ GAUCHE . ESPACEMENT INITIAL S_O

$$V_A = \frac{p_u L}{2} - \frac{\Delta M}{L} = 29{,}72 \times 2{,}5 - \frac{73{,}43}{5{,}0} = 59{,}61 \text{ kN.}$$

A l'abscisse $x_B = \frac{5h}{6} = 0{,}292$ m : $V_B = V_A - p_u x_B = 59{,}61 - 29{,}72 \times 0{,}292 = 50{,}94$ kN.

Section d'acier en B : $\frac{A_t}{s} = \frac{V\gamma_s}{0{,}9\, df_e} - 0 = \frac{50{,}94 \times 10^{-3} \times 10^4 \times 1{,}15}{0{,}9 \times 0{,}35 \times 500} = 4{,}34$ cm²/m.

Choisissons des cadres HA6 : $A_t = 2 \times 0{,}283 = 0{,}566$ cm².

Espacement maximal :

$$V_{min2} = \frac{0{,}9\, df_e\, A_t}{\gamma_s\, s_{max}} + 0{,}3\, kf_{t28}\, b_o\, d = \frac{0{,}9 \times 0{,}3 \times 500 \times 0{,}566 \times 10^{-4}}{1{,}15 \times 0{,}27} 10^3 = 24{,}59 \text{ kN}$$

et $V_{min} = \text{Max}[V_{min1} ; V_{min2}] = 24{,}59$ kN.

d'où : $s_o = \frac{0{,}566}{4{,}34} = 0{,}130\,5$ m arrondi à 130 mm.

3.2. PREMIERS ESPACEMENTS

n_o = entier supérieur de $\left[\frac{0{,}292 - 0{,}05}{0{,}13} + \frac{500}{2}\right] = 4{,}36$ arrondi à l'entier le plus proche soit $n_o \times s_o = 4 \times 130$.

Abscisse de C et D : $x_C = x_D = 0{,}05 + 4 \times 0{,}13 = 0{,}570$.

Effort tranchant en D : $V_D = V_A - x_D\, p_u = 59{,}61 - 0{,}57 \times 29{,}72 = 42{,}67$ kN.
Effort tranchant en E et F : $V_E = V_F = 2 \times 42{,}67 - 50{,}94 = 34{,}40$ kN.

Ecartement des cadres en F :

$$s_1 = \frac{0{,}9\, df_e\, A_t}{\gamma_s (V - 0{,}3\, kf_{t28}\, b_o\, d)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}3 \times 500 \times 0{,}566 \times 10^{-4}}{1{,}15 \times 34{,}40 \times 10^{-3}} = 0{,}1932 \text{ m}$$ que l'on arrondi à 190 mm.

Longueur $EF = \frac{V_D - V_E}{p_u} = \frac{42{,}67 - 34{,}40}{29{,}72} = 0{,}278\,3$ m.

Nombre n_1 d'espacements s_1 sur la longueur $EG = 2\,EF = 0{,}556$ m : n_1 = entier supérieur de $\frac{0{,}566}{0{,}190} = 2{,}93$, soit $n_1 = 3$.

Abscisse de G : $x_G = 0{,}05 + 4 \times 0{,}130 + 4 \times 0{,}190 = 1{,}14$ m.
Effort tranchant correspondant à l'abscisse $x_H = x_G = 1{,}14$: $V_H = 25{,}73$ kN > $V_{min} = 24{,}59$ kN

$V_J = V_K = 2 \times 25{,}73 - 34{,}47 = 16{,}99$ kN < Vmin.

A partir de ce point et jusqu'au point d'effort tranchant minimum, l'espacement sera de 0,27 m.

On opère de même pour l'autre côté et l'on trouve, in fine (voir figure 1) :

Nombre de cadres	Espacements mm	Effort tranchant correspondant kN
1	50	50,95
4	130	50,95
3	190	34,40
3	250	24,59
1	240	24,59
3	250	24,59
3	190	35,24
4	130	50,60
5	100	66,15
6	80	80,32
1	50	80,32

4. MODE D'EMPLOI

Les données peuvent être directement entrées au clavier ou stockées en DATA en fin de programme.

Pour une entrée des données au clavier, les variables sur une même ligne sont à rentrer séparées par un ou plusieurs espaces blancs.

Ligne 1 **L , b_o , h , d**
L = portée entre nus de la travée (m)
b_o = largeur de l'âme (m)

h = hauteur totale de la section (m)
d = hauteur utile (m)

Ligne 2 — s_{max}
s_{max} = espacement maximum autre que 0,40 m ou 0,9 d, sinon = 0
Par exemple, lorsque l'on veut imposer un espacement maximum supérieur à 0,40 m pour les poutres hautes.

Ligne 3 — f_{c28} , f_e
f_{c28} = résistance caractéristique du béton (MPa)
f_e = limite élastique des aciers transversaux (MPa)

Ligne 4 — k
k = 0 s'il y a reprise de bétonnage, sinon k = 1

Ligne 5 — IKA
IKA = 1 pour une courbe en escalier à cheval
= 2 pour une courbe enveloppe supérieure
= 3 pour la liste des espacements de Caquot.

Remarque. On peut disposer la courbe à cheval plus ou moins au-dessus ou au-dessous de la valeur moyenne en jouant sur le coefficient EKO2 situé dans les premières lignes du programme. La partie en-dessous est égale à EKO2 fois la partie au-dessus.

Ligne 6 — p_u , M_g , M_d
p_u = charge répartie uniforme ultime (kN/m) du cas décrit
M_g = moment ultime à l'appui gauche correspondant au cas de charge
M_d = moment ultime à l'appui droit correspondant au cas de charge
Autant de ligne qu'il y a de cas de charges.
Fin = 0,0,0 pour des données en DATA
ou bien 0 pour des données entrées au clavier

Ligne 7 — n, phi (pour une entrée au clavier seulement)
Le programme calcule la section maximum d'acier nécessaire et l'écartement minimum. Il propose plusieurs choix de nombre de brins et de diamètre et l'espacement correspondant. En fonction de l'espacement minimum choisi, on indique les valeurs de n et phi.
S'il y a plusieurs diamètres, par exemple 1 cadre HA8 + 3 épingles HA6, entrer sur la même ligne, séparées par un espace : 2 8 3 6

Ligne 8 — n, phi (pour une entrée en DATA seulement)
Description des aciers de cadres. (Fin = 0,0)
Exemple : 1 cadre HA8 et 3 épingles HA6 s'écrivent
2,8
6,6
0,0

5. EXEMPLE

Travée de rive d'une poutre continue de 5 m de portée soumise à 3 cas de charge et armée de cadres Ø6.

Cas de charge	Charge pu kN/m	Moment ELU à l'appui gauche kNm	Moment ELU à l'appui droit kNm
1	29,72	0	−73,43
2	29,72	0	−62,50
3	16,66	0	−52,09

Béton : f_{c28} = 25 MPa et acier : f_e = 500 MPa
Dimensions : b_o = 0,20 m, h = 0,35 m, d = 0,30 m
Avec reprise de bétonnage.

Données

```
DATA   5 , 0.2 ,0.35 ,0.3        L, b0 , h, d
DATA   0 , 25 , 500 , 0 , 1      smax , fc28 , fe , k, IKA
DATA   0 , 0                     fin de description des aciers
DATA   29.72 , 0 , -73.43        cas 1 : pu , Mg , Md
DATA   29.72 , 0 , -62.50        cas 2 : pu , Mg , Md
DATA   16.66 , 0 , -52.09        cas 3 : pu , Mg , Md
DATA   0 , 0 , 0                 fin de description des cas de charge
DATA   2 , 6                     2 HA6
```

Résultats sur écran (ou sur fichier, voir en tête du programme)

```
DONNEES
------
Portee entre Nus = 5.000 m
Largeur Ame      = 0.200 m
Hauteur Totale   = 0.350 m
Hauteur Utile    = 0.300 m
Aciers Transversaux :
                    2 phi 6
                  soit  At = 0.565 cm2/m

fe = 500 MPa    ;    fc28 = 25.0 MPa      ;      ft28 = 2.10 MPa
       avec Reprise de Betonnage
Distance a l'Appui du Premier Cadre = 50 mm

Charge = 29.72 kN/m ; Mg = 0.000 kNm ; Md = -73.430 kNm ; Vg =  59.61 kN ; Vd = -88.99 kN
Charge = 29.72 kN/m ; Mg = 0.000 kNm ; Md = -62.500 kNm ; Vg =  61.80 kN ; Vd = -86.80 kN
Charge = 16.66 kN/m ; Mg = 0.000 kNm ; Md = -52.090 kNm ; Vg =  31.23 kN ; Vd = -52.07 kN

Efforts Tranchants Resistants a Cheval sur Efforts Tranchants Appliques
```

```
RESULTATS
---------
De Gauche a Droite, Nombre et Espacements des Cadres :

     n      s      V
-    1     50   53.13
0    4    120   53.13
1    3    170   38.97
2    3    270   24.59
3    1    220   24.59
4    3    270   24.59
5    2    210   32.17
6    3    150   44.75
7    4    110   58.92
8    4     90   70.91
9    5     80   80.32
-    1     50   80.32

Verification : Portee = Somme des Espacements :  5.000 m =  5.000 m
          Soit 33 Cadres
```

Le dessin suivant apparaît sur l'écran (Fig. 2). On trouve en abscisse la distance à l'appui gauche et en ordonnée les 3 droites d'effort tranchant ultime et l'escalier de l'effort tranchant résistant. La droite horizontale correspond à l'espacement maximal ou au pourcentage minimal.

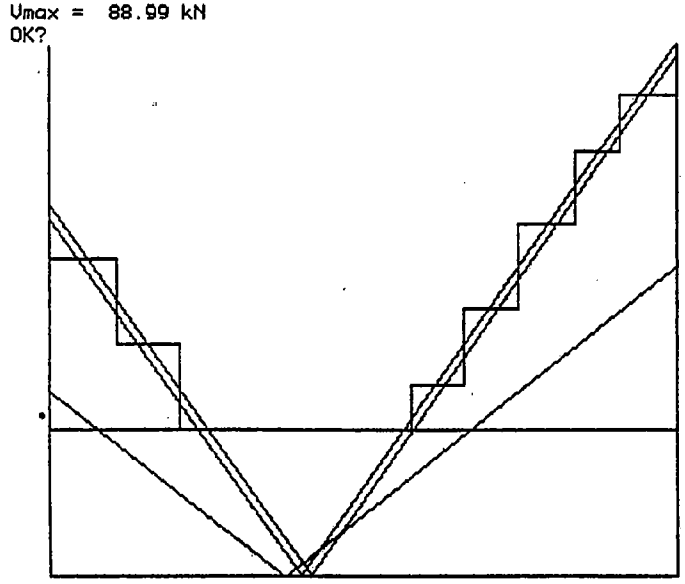


Fig. 2 – Dessin en sortie du programme « ESCADRE ».

ANNEXE B

CALCUL DES PLANCHERS À DALLES ALVÉOLEES SOUS CHARGES CONCENTRÉES

1. DÉFINITION

Les planchers à dalles alvéolées sont constitués de dalles précontraintes, préfabriquées de largeur courante 1,20 m, rarement de 0,60 m ou 2,40 m, dont l'épaisseur varie de 0,12 m à 0,35 m. Les alvéoles sont des évidements réalisés par extrusion et destinées à alléger la dalle (Fig. 1).

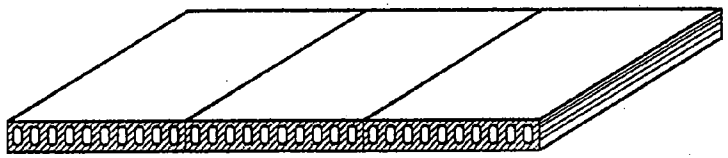


Fig. 1 – Dalle alvéolée.

Les seules armatures sont des aciers de précontrainte longitudinaux (fils ou torons).

Les dalles sont liées entre elles par un béton de clavage coulé en place qui assure la transmission des efforts verticaux d'une dalle à ses voisines et permet d'éviter l'effet « touches de piano » (Fig. 2).

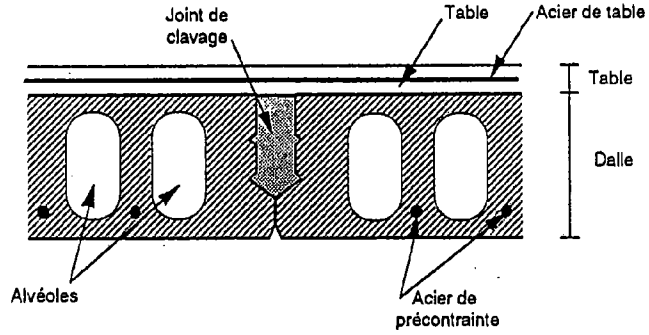


Fig. 2 – Joint de clavage entre deux dalles.

Les dalles peuvent comporter une dalle collaborante rapportée (que nous appellerons table) dont le rôle est de répartir les charges concentrées et d'améliorer la liaison entre les dalles.

Ces tables sont obligatoires en cas de charges concentrées et doivent avoir, dans ce cas, une épaisseur minimal de 5 cm.

Les points à vérifier sont :
- la résistance à la flexion en tenant compte de la table ;
- la résistance au cisaillement dû à l'effort tranchant et à la torsion éventuelle ;
- la liaison entre deux dalles (cisaillement du joint) ;
- la liaison entre la dalle et la table (interface).

Les rives doivent être appuyées en cas de charges concentrées (Fig. 3).

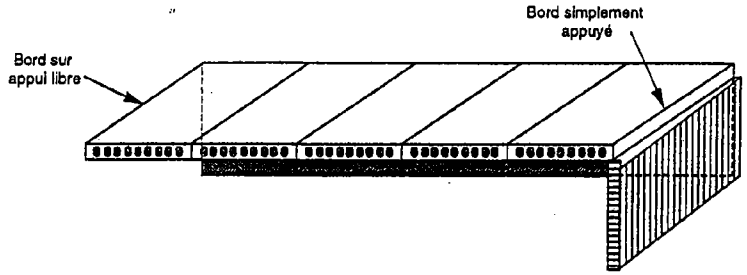


Fig. 3 – Bords libre ou appuyé.

Le règlement de calcul est le CPT-« Planchers » (Cahier des prescriptions techniques communes aux procédés de planchers), Titre III (1re partie) - Planchers confectionnés à partir de dalles alvéolées en béton précontraint, mars 1992, avec modificatif n° 1 de mars 1994 (édités par le CSTB).

2. CHARGES CONCENTRÉES

La répartition d'une charge concentrée sur la dalle chargée et sur les autres dalles peut se calculer en admettant une transmission d'effort verticaux par cisaillement le long des joints. Contrairement à une dalle en béton armé, il n'y a pas de moment transversal à la jonction de deux panneaux et le comportement est intermédiaire entre celui du panneau isolé et celui d'une dalle rectangulaire satisfaisant l'équation de Lagrange $\left(\Delta\Delta w = -\frac{p(x,y)}{D}\right)$.

La future norme européenne donne une règle forfaitaire sous forme d'abaque qui ne tient compte ni de la raideur à la torsion, ni de la raideur à la flexion des dalles.

Nous proposons une méthode de calcul qui suppose que la transmission des efforts entre dalles est réalisé par un certain nombre de charges concentrées réparties le long de la portée.

Le comportement réel correspond à un nombre infini de ces charges, mais l'approximation est suffisante avec un nombre de points de l'ordre de 5 à 10.

Une charge concentrée P située à la verticale d'un joint entraîne une torsion des deux dalles adjacentes de largeur *b*. Le moment de torsion $T = 0{,}5\ b\ P$ est repris en partie par ces deux dalles et par un moment de torsion antagoniste engendré par les réactions exercées par les dallles voisines des deux dalles (Fig. 4 et 5).

Le problème consiste à écrire l'égalité des flèches f_{ij} en un certain nombre de points du joint entre deux panneaux j et $j + 1$, en fonction des charges extérieures réparties p ou concentrées P_{jk} ($k^{ème}$ charge concentrée sur le panneau j) et des réactions concentrées en ces points R_{ij}.

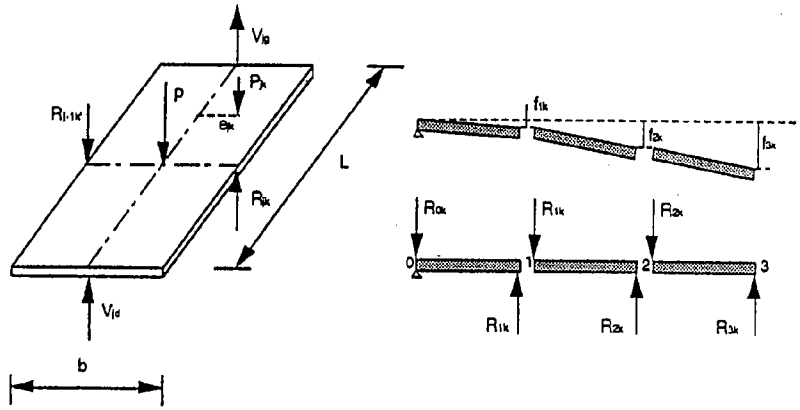


Fig. 4 – Charges appliquées sur un panneau j.

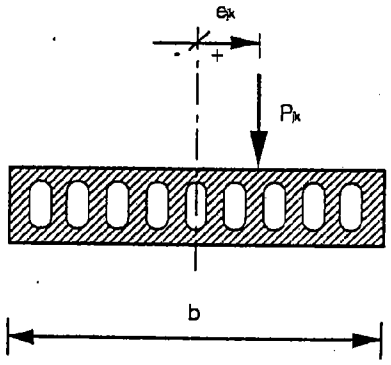


Fig. 5 – Charge concentrée sur panneau.

Flèche due à une charge répartie p, à l'abscisse x : $f_p = \dfrac{px(2Lx^2 - x^3 - L^3)}{24EI}$

Flèche à l'abscisse x due à une charge concentrée unité située à l'abscisse a :

– si $x \leqslant a$: $f = \dfrac{x(L-a)(x^2+a^2-2aL)}{6EIL}$;

– si $x \geqslant a$: $f = \dfrac{a(L-x)(x^2+a^2-2xL)}{6EIL}$.

Flèche en bord d'un panneau, à l'abscisse x, due à la rotation de torsion autour de son axe, pour un moment de torsion $d\hat{u}$ à une charge unité excentrée de e et appliqué à l'abscisse a :

– si $x \leqslant a$, la rotation de torsion vaut :

$$\theta = \left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{xT}{GK} \quad \text{avec} \quad T = e \ ; \text{ la flèche : } \quad f' = \frac{\theta b}{2} = \left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{xeb}{2GK}$$

– si $x \geqslant a$, la rotation de torsion vaut :

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{aT}{GK} \quad \text{avec} \quad T = e \ ; \text{ la flèche : } \quad f' = \frac{\theta b}{2} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{aeb}{2GK}$$

Soit φ_e la flèche en bord droit de panneau (Fig. 5), due à une charge unité d'excentricité e, appliquée à l'abscisse a : $\varphi_e = f + f'$ et φ'_e en bord gauche de panneau : $\varphi'_e = f - f'$

Pour une charge d'excentricité $b/2$, nous noterons φ au lieu de $\varphi_{b/2}$ pour simplifier.

Ainsi, sous l'action des charges extérieures réparties p (donnant une flèche f_x à l'abscisse x), des charges concentrées P_{jk} et des réactions entre panneaux adjacents R_{ij-1} et R_{ij}, la flèche au point i d'abscisse x du joint j est la même pour le panneau $j-1$ et pour le panneau j :

$$f_{ij} = R_{ij-1}\,\varphi' - R_{ij}\,\varphi + P_{jk}\,\varphi_e + f_x = R_{ij}\,\varphi - R_{ij+1}\,\varphi' + P_{j+1k}\,\varphi'_e + f_x$$

d'où l'équation en classant suivant les inconnues R_{ij} :

$$-R_{ij-1}\,\varphi' + 2\,R_{ij}\,\varphi - R_{ij+1}\,\varphi' = P_{jk}\,\varphi_e - P_{j+1k}\,\varphi'_e$$

Pour le premier panneau numéroté 0 (et pour le dernier), on a les deux cas :

– bord libre pour lequel l'équation s'écrit : $R_{i0} = 0$;

– bord simplement appuyé avec : $R_{i0}\,\varphi - R_{i1}\,\varphi' = -P_{1k}\,\varphi'_e - f_x$.

Si l'on a p panneaux et n points de calcul par joint, on établit un système de $n(p+1)$ équations à $n(p+1)$ inconnues (les réactions R_{ij}).

Remarque

On ne prend en compte, dans la transmission des efforts à travers les joints de clavage, que des charges appliquées postérieurement au clavage, c'est-à-dire après durcissement du béton de clavage.

Les charges appliquées antérieurement au clavage sont prises en compte dans le calcul des sollicitations, mais pas dans celui des réactions entre panneaux, ni dans celui des déformations.

3. MOMENTS D'INERTIE

3.1. CALCUL DU MOMENT D'INERTIE DE FLEXION I

La valeur du moment d'inertie de la dalle seule est généralement donné par le fabriquant. Le moment d'inertie de l'ensemble dalle + table se calcule en homogénéisant du fait de la différence de résistance des bétons de dalle (coulé en usine) et de table (coulé sur place) par application du théorème de Huyghens. Le CPT plancher admet de prendre un coefficient d'homogénéisation égal à 1.

3.2. CALCUL DU MOMENT D'INERTIE DE TORSION K

Nous appliquerons la théorie du tube creux en vérifiant que l'épaisseur prise en compte pour chaque paroi ne dépasse pas le 1/6 de la plus petite dimension de la dalle y compris table (BAEL, §A5.4.2 et BPEL §7.6.3).

Deux méthodes peuvent être utilisées : la méthode du tube unique et la méthode des tubes multiples.

3.2.1. Tube unique

On prendra le tube extérieur, de largeur b et de hauteur totale h (dalle + table) (Fig. 6) :
Ω = aire située à l'intérieur de la ligne moyenne du tube creux
s = abscisse curviligne de la ligne moyenne et ds sa différentielle
e = épaisseur du tube creux

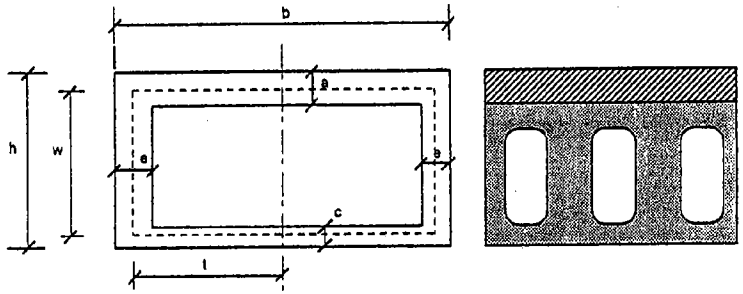


Fig. 6 – Tube unique.

Le moment d'inertie de torsion est donné par:

$$K = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{e}} \quad \text{avec} \quad \int \frac{ds}{e} = (b-e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(h-\frac{c}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$= \frac{2w}{e} + 2\,t\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$$

L'aire située à l'intérieur de la ligne moyenne du tube creux (ligne en pointillé sur la figure 6) est donnée par :

$$\Omega = (b-e)\left(h-\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right) = 2\,t\,w$$

Le flux, produit « contrainte × épaisseur », est constant tout le long de la ligne moyenne et vaut :

τ_{uT} × épaisseur = cste = $\frac{T}{2\Omega}$ d'où la contrainte τ_{uT} en fonction des épaisseurs e, a ou c.

D'où les contraintes de cisaillement :

$$\tau_{aileinf} = \frac{T}{2c\Omega}$$

$$\tau_{ailesup} = \frac{T}{2a\Omega}$$

$$\tau_{âme} = \frac{T}{2e\Omega}$$

3.2.2. Multitubes

Pour une dalle alvéolée comprenant $2n-1$ alvéoles, soit n sections creuses concentriques superposées (4 alvéoles sur la figure 7, soit 3 sections creuses superposées), chaque section creuse reprend une partie du moment de torsion extérieur T en respectant le principe qu'un même morceau d'aile soit partagé entre les différents sections creuses.

La répartition du moment de torsion entre chacun des tubes est faite en supposant qu'ils ont tous la même rotation (Fig. 7) :

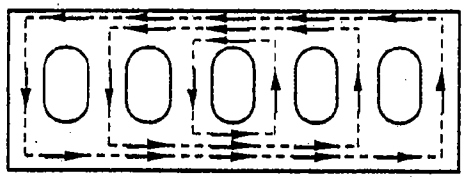


Fig.7 – Multitubes concentrique à 3 sections creuses concentriques superposées

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T_1}{GK_1} = \frac{T_2}{GK_2} = \frac{T_3}{GK_3} = \frac{T}{\sum GK_i} \quad \text{d'où} \quad T_i = \frac{TK_i}{\sum K_i}$$

avec $K_i = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{e}}$ pour chacun des tubes creux.

On superpose les n sections creuses de la figure 8, où l'on n'a dessiné que la moitié gauche.

Si l'on a n_a alvéoles, le nombre maximal n de rectangles concentriques que l'on peut retenir est égal à :

$$n = \frac{n_a+1}{2}$$

Pour un seul rectangle, on a : $t_1 = \frac{b-e}{2}$

Pour un nombre de rectangles $n \geqslant 1$, on calcule d'abord $t_1 = v + \frac{e+e'}{2}$ puis

$t_n = \frac{b}{2} - e - (n-1)(v+e')$ et t_j pour $j = 2$ à $n-1$: $t_j = v + e'$.

Rectangle n° j	Longueur t_i	$\int \frac{ds}{e}$	Ω_i	K_i
j = 1	$t_1 = \frac{b-e}{2}$ si n = 1 $t_1 = v + \frac{e+e'}{2}$ pour n > 1	$\frac{2w}{e} + 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\sum_{i=1}^{n} it_i$	$2w\sum_{i=1}^{n} t_i$	$K_1 = \frac{4\Omega_1^2}{\int_1 \frac{ds}{e}}$
j = 2 à n – 1	$t_i = v + e'$	$\frac{2w}{e'} + 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\sum_{i=j}^{n} it_i$	$2w\sum_{i=j}^{n} t_i$	$K_j = \frac{4\Omega_j^2}{\int_j \frac{ds}{e}}$
j = n	$t_n = \frac{b+e'}{2} - e - (n-1)(v+e')$	$\frac{2w}{e'} + 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) n\,t_n$	$2w\,t_n$	$K_n = \frac{4\Omega_n^2}{\int_n \frac{ds}{e}}$

Le CPT-Plancher « Dalles alvéolées », art. 107.4 indique qu'à défaut de calculs plus précis on pourra retenir la méthode du tube unique.

Ce même article donne la contrainte limite de cisaillement : $\frac{0{,}85\,f_{t28}}{1{,}5}$ pour les zones non fissurées, c'est-à-dire près des appuis, à l'endroit où l'effort de précontrainte n'a pas encore d'effet sur toute la section droite.

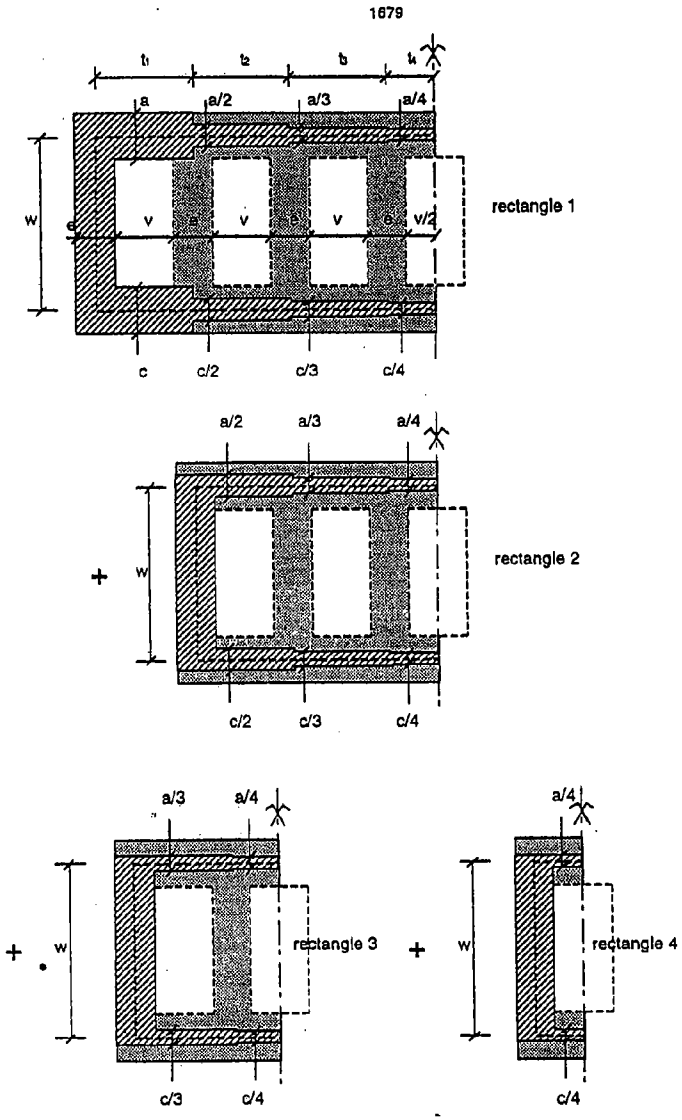


Fig. 8 – 4 sections creuses superposées concentriques.

Si la résistance du béton à la traction est différente pour la dalle et pour la chape rapportée (la table), on homogénéisera le béton de chape en fonction du rapport des résistances à la traction tout en gardant la même ligne moyenne.

On remarquera que, dans les faits, la résistance au cisaillement de la table supérieure est améliorée du fait d'une épaisseur (homogénéisée) en général supérieure à l'épaisseur de calcul limitée au sixième de l'épaisseur totale, ainsi que dans la partie inférieure de la dalle du fait de la présence des aciers adhérents de précontrainte.

3.3. ADAPTATION ET REDISTRIBUTION

Les moments d'inertie de flexion I et de torsion K sont calculés pour une section non fissurée. Or, à l'état-limite ultime, les sections se fissurent soit du fait de la torsion (si celle-ci est prépondérante), soit du fait de la flexion, soit des deux. Une diminution d'un ou des deux moments d'inertie change la valeur des moments fléchissant et de torsion (sauf si la diminution relative est identique). Il y a donc adaptation de la structure et redistribution des sollicitations comme cela est le cas pour les moments des poutres continues.

3.3.1. Rupture par la flexion

Si l'état-limite ultime le premier atteint est celui de flexion, on peut admettre que la fissuration diminuera le moment d'inertie de flexion I donc augmentera la flèche de flexion par rapport à celle due à la torsion. Le moment de torsion augmentera entraînant une augmentation du cisaillement. On peut admettre que l'état-limite global est atteint si simultanément sont atteints les états limites de flexion et de torsion.

3.3.2. Rupture par cisaillement

Le moment d'inertie de torsion diminue, entraînant un moment de torsion repris plus petit donc une augmentation du moment de flexion.

Dans la pratique, on doit tenir compte de la flexion transversale sur la largeur d'un même panneau, c'est-à-dire de la flèche due à une charge R_{ij} ou p_{jk} excentrée de $b/2$ ou e sur une portée égale à l'excentricité. Comme cette excentricité est faible devant la portée L, l'influence est faible. On doit également tenir compte d'une certaine fissuration due à la torsion et, pour ces raisons, on pourra diviser la raideur de torsion GK par un coefficient compris entre 1 et 1,25.

4. EXEMPLE : PLANCHER DE 4 DALLES ALVÉOLÉES SOUMIS À SON POIDS PROPRE ET À DEUX CHARGES CONCENTRÉES SYMÉTRIQUES

Pour ne pas compliquer le calcul manuel, nous avons retenu des charges symétriques et un seul point de calcul par joint entre panneaux.

4.1. DONNÉES (Fig. 9 et 10)

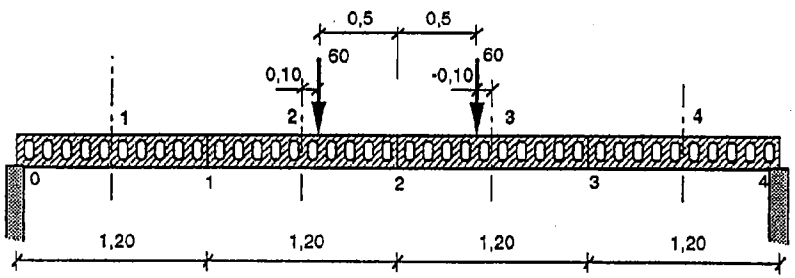


Fig. 9 – Exemple de plancher à 4 panneaux.

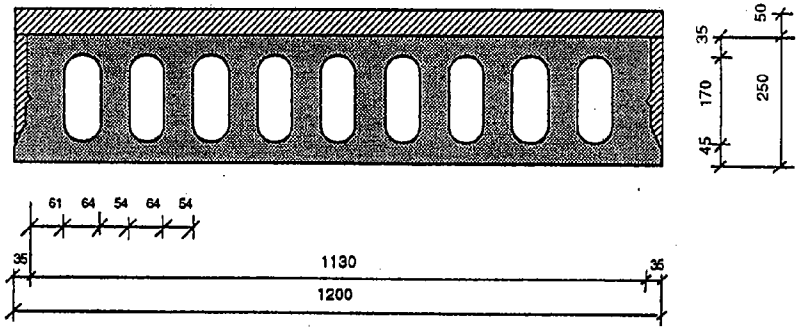


Fig. 10 – Section schématisée d'un panneau.

4 panneaux de 1,20 m de largeur brute et de 1,13 m de largeur nette et de 9,40 m de portée
Charge répartie non pondérée : $p = 4{,}6$ kN/m² sur 1,20 m soit 5,52 kN/m
2 charges concentrées non pondérées de 60 kN à mi-portée et à 0,50 m du joint central
Moment d'inertie de flexion I (dalle + table) = 0,0024644 m⁴
Résistance du béton de dalle : 50 MPa (3,6 MPa à la traction)
Résistance du béton de table : 25 MPa (2,1 MPa à la traction)
Module d'Young moyen : E = 36000 MPa
Raideur de flexion : EI = 88,70

Les alvéoles sont constituées de deux demi-cercles de 32 mm de rayon et d'un rectangle de 64 × 106.

Le moment de torsion pris en compte est celui du tube creux unique (voir en 4.3.3-a ci-après) qui donne un moment d'inertie de torsion K = 0,00534 m⁴.

Pour tenir compte de la fissuration de torsion (contraintes élevées) et de la flexion transversale sur la largeur b de chaque panneau, nous diviserons la raideur de torsion par un coefficient compris entre 1 et 1,25. Prenons 1,18.

On a : $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ avec $\nu = 0$, d'où la raideur de torsion :

$$GK = \frac{36000}{2}\,\frac{0{,}00534}{1{,}18} = 81{,}46.$$

Le bras de levier de la section totale (dalle + table) que l'on peut calculer au moyen du programme « CARAMEC » vaut : $z = 0{,}2133$ m.

4.2. CALCUL DES COEFFICIENTS φ

En appliquant les formules ci-dessus, on calcul les flèches unitaires. Par exemple, pour $a = 4{,}7$, $x = 4{,}7$ et $e = 0{,}6$, on a :

$$f = \frac{x(L-a)(x^2+a^2-2aL)}{6EIL} = \frac{4{,}7 \times 4{,}7 \times 44{,}18}{6 \times 88{,}7 \times 9{,}4} = 0{,}19509$$

ou encore

$$f' = \left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{xeb}{2GK} = 0{,}5 \times \frac{4{,}7 \times 0{,}6 \times 1{,}2}{2 \times 81{,}5} = 0{,}01038$$

x (abscisse calcul)	a (abscisse réaction)	e (excentricité charge)	f (flèche de flexion)	f' (flèche de rotation)	φ (f + f')	φ' (f – f')
4,7	4,7	0,6	0,1951	0,0104	0,2055	0,1847
4,7	4,7	–0,6	0,1951	–0,0104	0,1847	0,2055

x (abscisse calcul)	a (abscisse réaction)	e (excentricité charge)	f (flèche de flexion)	f′ (flèche de rotation)	φ_e (f + f′)	φ'_e (f − f′)
4,7	4,7	0,1	0,1950	0,0018	0,1968	0,1934
4,7	4,7	−0,1	0,1950	−0,0018	0,1934	0,1968

4.3. MISE EN ÉQUATION (Fig. 11)

ur raison de symétrie, la réaction R_2 est nulle et l'on a $R_3 = R_1$ et $R_4 = R_0$. On est amené à un système de 2 équations à 2 inconnues au lieu de 5 équations à 5 inconnues.

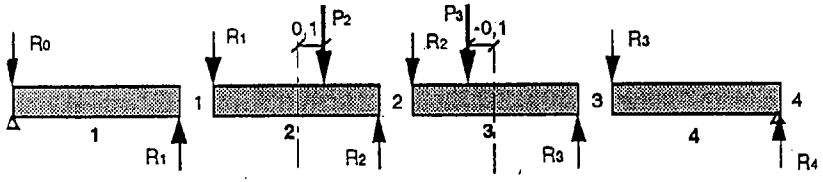


Fig. 11 – Charges et réactions entre panneaux.

= flèche à mi-portée due à la charge répartie *p disposée après clavage* en ELU (car on cherche les valeurs des sollicitations ELU) : ici $p = 0$

$$f_x = \frac{1{,}35 \times 5pL^4}{384EI} = \frac{1{,}35 \times 5 \times 0 \times 9{,}4^4}{384 \times 88{,}70} = 0 \text{ mm}$$

Charge ELU	Excentricité e	P φ_e	P φ_e'
$P_2 = 1{,}5 \times 60 = 90$	0,1	17,714	17,402
$P_3 = 1{,}5 \times 60 = 90$	−0,1	17,402	17,714

u joint 0, simplement appuyé : $f_0 = 0$

$$R_0 \varphi - R_1 \varphi' = -f_x \quad (1)$$

ıit : $0{,}2055\ R_0 - 0{,}1847\ R_1 = 0$ (1)

u joint 1 :

$$\varphi' + 2\ R_1 \varphi - R_2 \varphi' = -P_2 \varphi'_e \quad (2)$$

$1847\ R_0 + 0{,}4110\ R_1 - 0{,}1847\ R_2 = -17{,}402$ (2)

ınt les racines sont : $R_0 = -63{,}872$; $R_1 = -71{,}054$ et $R_2 = 0$

4.3.1. Sollicitations du panneau 1

Effort tranchant	Charge répartie totale : C = p b L	Charge concentrée P	Réaction gauche R_0	Réaction droite R_1	Total
Charge appliquée sur le panneau	1,35 × 9,4 × 5,52 = 70,05	P = 0 abscisse a	−63,872 à l'abscisse a = 4,7	−71,054 à l'abscisse a = 4,7	
Effort tranchant gauche (kN)	0,5 C = 35,02	$\left(1 - \frac{a}{L}\right) P$ = 0	$\left(1 - \frac{a}{L}\right) R_0$ = 0,5 R_0 = −31,94	$-\left(1 - \frac{a}{L}\right) R_1$ = −0,5 R_1 = 35,53	38,61
Effort tranchant droit (kN)	0,5 C = −35,02	$-\frac{a}{L} P$ = 0	$-\frac{a}{L} R_0$ = 31,94	$\frac{a}{L} R_1$ = −35,53	−38,61
Excentricité e (m)	0	-	−0,6	0,6	
Moment de torsion à gauche (kNm)	0	$-\left(1 - \frac{a}{L}\right) P_e$ = 0	$-\left(1 - \frac{a}{L}\right) R_0 e$ = −19,16	$-\left(1 - \frac{a}{L}\right) R_1 e$ = −21,32	−40,48
Moment de torsion à droite (kNm)	0	$\frac{a}{L} Pe$ = 0	$\frac{a}{L} R_0 e$ = 19,16	$\frac{a}{L} R_1 e$ = 21,32	40,48
Moment à mi-portée (kNm)	$\frac{CL}{8}$ = 82,31	$= \frac{Pa}{2}$ si $a < \frac{L}{2}$ $= \frac{P(L-a)}{2}$ si $a > \frac{L}{2}$ = 0	$= \frac{R_0 a}{2}$ si $a < \frac{L}{2}$ $= \frac{R_0(L-a)}{2}$ si $a > \frac{L}{2}$ = −150,10	$= -\frac{R_1 a}{2}$ si $a < \frac{L}{2}$ $= -\frac{R_1(L-a)}{2}$ si $a > \frac{L}{2}$ = 166,98	99,19
Flèche à mi-portée à l'est (mm)	$\frac{5CL^3}{384EI} = f_x = 0$ (1)	= P φ = 0	= $R_0 \varphi'$ = −63,872 × 0,1847 = −11,80	= $R_1 \varphi$ = 71,054 × 0,2055 = 14,60	2,80
Flèche à mi-portée à l'ouest (mm)	$\frac{5CL^3}{384EI} = f_x = 0$ (1)	= P φ' = 0	= $R_0 \varphi$ = −63,872 × 0,2055 = −13,13	= $-R_1 \varphi'$ = 71,054 × 0,1847 = 13,13	= 0 (CQEV)

(1) On ne calcule que les flèches qui se produisent après clavage.

4.3.2. Sollicitations du panneau 2

Effort tranchant	Charge répartie totale : C = p b L	Charge concentrée P	Réaction gauche R_1	Réaction droite R_0	Total
Charge pliquée sur le panneau	1,35 × 9,4 × 5,52 = 70,049	P = 1,5 × 60 = 90 à l'abscisse a	−71,054 à l'abscisse a = 4,7	0 à l'abscisse a = 4,7	
Effort tranchant gauche (kN)	0,5 C = 35,02	$\left(1-\frac{a}{L}\right)P$ = 45,00	$\left(1-\frac{a}{L}\right)R_1$ = 0,5 R_1 = −35,53	$\left(1-\frac{a}{L}\right)R_2$ = 0,5 R_2 = 0	44,49
ort tranchant droit (kN)	0,5 C = −35,02	$-\frac{a}{L}P$ = −45,00	$-\frac{a}{L}R_1$ = 35,53	$\frac{a}{L}R_2$ = 0	−44,49
xcentricité e (m)	0	0,1	−0,6	0,6	
Moment de sion à gauche (kNm)	0	$-\left(1-\frac{a}{L}\right)P_e$ = −4,5	$-\left(1-\frac{a}{L}\right)R_1 e$ = −19,16	$-\left(1-\frac{a}{L}\right)R_2 e$ = 0	−25,82
Moment de sion à droite (kNm)	0	$\frac{a}{L}Pe$ = 4,5	$\frac{a}{L}R_1 e$ = 19,16	$-\frac{a}{L}R_2 e$ = 0	25,82
Moment à mi-portée (kNm)	$\frac{CL}{8}$ = 82,31	$=\frac{Pa}{2}$ si $a<\frac{L}{2}$ $=\frac{P(L-a)}{2}$ si $a>\frac{L}{2}$ = 211,50	$=\frac{R_1 a}{2}$ si $a<\frac{L}{2}$ $=\frac{R_1(L-a)}{2}$ si $a>\frac{L}{2}$ = −166,97	$=-\frac{R_2 a}{2}$ si $a<\frac{L}{2}$ $=\frac{R_2(L-a)}{2}$ si $a>\frac{L}{2}$ = 0	126,83
lèche à mi-portée à l'est (mm)	$\frac{5CL^3}{384EI} = f_x = 0$ (1)	= P φ_e = 90 × 0,1968 = 17,714	= $R_1 \varphi'$ = −71,054 × 0,1847 = −13,124	= $R_2 \varphi$ = 0	= 4,59
lèche à mi-rtée à l'ouest (mm)	$\frac{5CL^3}{384EI} = f_x = 0$ (1)	= P φ'_e = 90 × 0,1916 = 17,406	= $R_1 \varphi$ = −71,054 × 0,2055 = −14,602	= $-R_2 \varphi'$ = 0	= 2,80

On ne calcule que les flèches qui se produisent après clavage.

4.3.3. Cisaillements

On peut utiliser la méthode du tube creux unique ou du multitube.

a) Tube creux unique

Le moment d'inertie de torsion du seul tube extérieur (voir en 3.21 ci-dessus) vaut :

$$K = \frac{2w}{e} + 2t\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$$

Le « CPT-Planchers-Dalles alvéolées » tolère de ne pas homogénéiser les bétons du fait de leurs résistances différentes.

$b = 1{,}130$ m $\quad h = 0{,}300$ m $\quad a = 0{,}085$ m $\quad c = 0{,}045$ m $\quad e = 0{,}061$ m $\quad e' = 0{,}054$ m

Nous limiterons les épaisseurs des parois à $h/6 = 0{,}05$ m soient :

$c = 0{,}045$ m
$a = 0{,}05$ m
$e = 0{,}05$ m

$$t = \frac{b-e}{2} = \frac{1{,}130-0{,}050}{2} = 0{,}540 \text{ m}$$

$$w = h - \frac{a+e}{2} = 0{,}300 - \frac{0{,}05+0{,}045}{2} = 0{,}2525 \text{ m}$$

et : $$\int \frac{ds}{e} = \frac{2t}{a}+\frac{2t}{c}+\frac{2w}{e} = \frac{2\times0{,}54}{0{,}05}+\frac{2\times0{,}54}{0{,}045}+\frac{2\times0{,}2525}{0{,}05} = 55{,}70$$

$$\Omega = 2tw = 2\times0{,}54\times0{,}2525 = 0{,}2727 \text{ m}^2 \quad ; \quad K = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{e}} = 0{,}005340 \text{ m}^4$$

et les cisaillements :

$$\tau_{aileinf} = \frac{T}{2c\Omega} = \frac{0{,}04048}{2\times0{,}045\times0{,}2727} = 1{,}65 \text{ MPa}$$

$$\tau_{ailesup} = \frac{T}{2a\Omega} = \frac{0{,}04048}{2\times0{,}05\times0{,}2727} = 1{,}48 \text{ MPa}$$

$$\tau_{âme} = \frac{T}{2e\Omega} = 1{,}48 \text{ MPa}$$

Largeur des âmes : $b - 9v = 1{,}13 - 9\times0{,}064 = 0{,}554$ m

Cisaillement maximal d'effort tranchant : $\tau_v = \frac{V}{b_0 z} = \frac{0{,}0445}{0{,}554\times0{,}2333} = 0{,}34$ MPa

L'effort tranchant maximal et le moment maximal n'apparaissent pas au même endroit.

Pour $T_{max} = 40,48$ kNm, on a $V_u = 38,62$ kN d'où le cisaillement de l'âme dû à l'effort tranchant :

$$\frac{0,03862}{0,554 \times 0,2333} = 0,30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{âme} = 1,48 + 0,30 = 1,78 \text{ MPa}$$

Le cisaillement maximal est égal à : 1,78 MPa.

Le cisaillement limite est donné par : $\frac{0,85 f_{t28}}{1,5} = 2,04 > 1,78$ MPa : OK.

Sinon, voir en 4.3.5 ci-après comment on peut trouver une solution par redistribution des sollicitations due à la fissuration.

b) Multitubes

On déterminera les caractéristiques de la section nécessaires au calcul des cisaillements avec 5 rectangles imbriqués ayant la même rotation à la torsion d'où la répartition du moment de torsion pour chacun au prorata de son moment d'inertie de torsion (voir formules en 3.2.2 ci-dessus).

L'épaisseur prise en compte pour une paroi ne peut dépasser $h/6 = 0,05$ m.

Pour les formules et notations, voir en 3.2.2 ci-dessus.
$c = 0,045$ m $\qquad a = 0,085$ m limité à $h/6 = 0,05$
$e' = 0,054$ m limité à $h/6 = 0,05$ $\qquad v = 0,064$ m
$e = 0,061$ m limité à $h/6 = 0,05$ $\qquad w = h - \frac{a+c}{2} = 0,2525$ m

		1	2	3	4	5	Ensemble
$t_i =$	m	0,1270	0,1180	0,1180	0,1180	0,0590	0,5400
$\int \frac{ds}{e} =$		74,90	150,77	239,67	301,05	283,62	1050,01
$\Omega =$	m^2	0,2727	0,2086	0,1490	0,0894	0,0298	0,7494
$K =$	m^4	0,00397	0,00115	0,00037	0,00011	0,00010	0,005615
$T_i/T =$		0,70734	0,20555	0,06597	0,01891	0,00223	1,0000
$T_i =$	MNm	0,02899	0,00843	0,00270	0,00078	0,00009	0,04099

$\tau_{sup} =$	MPa	1,06	1,47	1,66	1,75	1,78
$\tau_{inf} =$	MPa	1,18	1,64	1,84	1,94	1,98
$\tau_{âme} =$	MPa	1,06	0,40	0,18	0,09	0,03

c) Remarques

1 - Le moment d'inertie de torsion du 5 tubes vaut 0,005615 m^4 au lieu de 0,00534 m^4. Etant plus fort, le moment de torsion sera également plus fort : 40,99 kNm au lieu de 40,48 kNm.

2 - Le cisaillement maximal de torsion, dans la partie centrale des ailes, vaut 1,98.

3 - Le cisaillement maximal dans l'âme vaut : 1,06 + 0,30 = 1,36 MPa

Le cisaillement limite est donné par : $\frac{0,85 f_{t28}}{1,5} = 2,04 > 1,98$ MPa : VÉRIFIÉ.

On constate que le fait de prendre 5 rectangles concentriques diminue la contrainte dans l'âme mais augment celle des ailes. En général, il convient de ne prendre qu'un seul rectangle, ce que autorise le « CPT-Planchers-Dalles alvéolées ».

Si l'on dispose d'une marge sur la résistance à la flexion (voir en 4.3.5 ci-dessous), on peut recommencer les calculs avec un moment d'inertie de torsion plus faible, supposant ainsi une fissuration due à la torsion. Ceci augmentera le moment de flexion, mais devra rester au-dessous du moment résistant.

4.3.4. Flexion

Nous prendrons la valeur du moment de flexion obtenu en ne retenant qu'un seul rectangle pour la torsion.
$M_{max} = 0,12683$ MNm
$M_g = 0,06097$ MNm (dû aux seules charges permanentes)
$P = 1,210$ MN
$b = 1,2$ m
$d = 0,255$ m

Dalle seule :
$S = 0,21\ m^2$; $\quad I = 0,0013717\ m^4$; $\quad v = 0,1271$ m
$v' = 0,1229$ m ; $\quad I/v = 0,01079\ m^3$; $\quad I/v' = 0,01116\ m^3$

$$\frac{P}{S} = \frac{1,21}{0,210} = 5,762 \qquad \frac{Pe_0}{I/v'} = \frac{1,21(0,1229 - 0,045)}{0,01116} = 8,446$$

$$\frac{M_g}{I/v'} = \frac{0,006097}{0,01116} = 5,463 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \times 25}{0,9 \times 1,5} = 15,74 \text{ MPa}$$ pour une combinaison de charge inférieure à 24 heures ($\theta = 0,9$)

$$\mu = \frac{M_{max}}{bd^2 \sigma_{bu}} = 0,103$$

$x = 1{,}25\ d\ (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0{,}03482$ m

Effort de compression du béton : $F_b = 0{,}8\ b\ x\ \sigma_{bu} = 0{,}8 \times 1{,}2 \times 0{,}03482 \times 15{,}74 = 0{,}526$ MN

Allongement de l'acier de précontrainte :

$$\varepsilon_p = \frac{F_p}{A_p E_p} = \frac{1{,}21 \times 1000}{930 \times 10^{-6} \times 190000} = 6{,}85\ ‰$$

• **Diagramme des contraintes du béton** (Fig. 12)

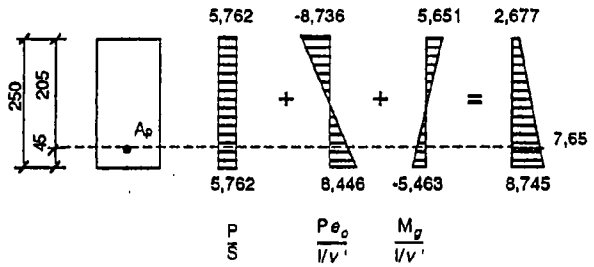


Fig. 12 – Contraintes du béton.

$\sigma_c = 7{,}65$ MPa au niveau du câble (voir figure)

$$\Delta\varepsilon'_p = \frac{5\sigma_c}{E_p} = 0{,}20\ ‰$$

$$\Delta\varepsilon''_p = 3{,}5\ \frac{d - x}{x} = 3{,}5\ \frac{0{,}255 - 0{,}02668}{0{,}02668} = 29{,}95 > 10, \text{ limité à } 10\ ‰$$

$\varepsilon''_p = \varepsilon_p + \Delta\varepsilon'_p + \Delta\varepsilon''_p = 6{,}85 + 0{,}20 + 10 = 17{,}05\ ‰$

Équation de l'acier : $\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100\left(\frac{\sigma_p \gamma_p}{f_{peg}} - 0{,}9\right)^5$.

Pour obtenir un allongement total de l'acier égal à 17,05‰, la contrainte de l'acier est égale à $\sigma''_p = 1523{,}3$ MPa. D'où l'effort de précontrainte y compris surtensions :
$P'' = A_p\ \sigma''_p = 930\ 10^{-6} \times 1523{,}3 = 1{,}417$ MN $> F_b = 0{,}526$ MN : OK.

4.3.5. Adaptation par fissuration de cisaillement de torsion

Un calcul du même type que ci-dessus permet de déterminer le moment résistant à la flexion ; on trouve $M_r = 304{,}3$ kNm.

En effet, supposons $M_R = 0{,}3043$ MNm : $\mu = 0{,}2478$; $x = 0{,}09235$; $z = 0{,}2181$ m ; $\Delta\varepsilon''_p = 6{,}164$ ‰ ; $\varepsilon''_p = 13{,}214$ ‰ ; $\sigma''_p = 1500{,}74$ MPa ; $P = 1{,}3957$ MN ; d'où $M_R = P\ z = 0{,}3043$ MNm ; ce qui est vérifié.

Si dans le cas de multitubes l'on avait un cisaillement maximal supérieur au cisaillement limite de 2,04 MPa, on recommencerait les calculs avec un moment d'inertie de torsion plus faible, pour les seuls panneaux dont le cisaillement de torsion dépasse la valeur limite.

La dalle et le système de charges appliqué conviendraient alors, car le moment de torsion élevé des panneaux où la contrainte de cisaillement dépasse la contrainte limite ferait que les panneaux se fissureraient à la torsion, ce qui entraînerait une diminution du moment d'inertie de torsion, donc un moment de torsion repris plus faible (car panneau moins raide à la torsion) et une augmentation du moment de flexion. Il restera alors à vérifier que la résistance à la flexion est assurée.

5. « DALVEOS » * - PROGRAMME DE CALCUL DES DALLES ALVÉOLÉES SOUS CHARGES RÉPARTIES ET CONCENTRÉES

Le programme suppose la transmission des charges d'un panneau à l'autre (JG panneaux), non par une force répartie, mais par un certain nombre (IG) charges concentrées uniformément distribuées le long de la clé entre deux panneaux consécutifs. Ces forces inconnues sont les solutions d'un système de IG x JG équations linéaires.

Les données sont à disposer en DATA en fin de programme.
On peut introduire des charges réparties uniformes partielles ou totales.

Les bords peuvent être libres ou simplement appuyés.

On obtient :

- la charge reprise par chaque panneau ;
- les efforts tranchants, moments de torsion et moments fléchissants dans chaque panneau, au droit de chaque charge extérieure et de chaque réaction entre panneaux ;
- la déformée (pondérée ELU) ;
- la valeur maximale des moments de flexion et de torsion, de l'effort tranchant, du cisaillement (torsion + effort tranchant) ;
- la vérification de la flexion à l'ELU (BPEL 91).

Les flèches ELS peuvent être obtenues en introduisant des coefficients γ_g et γ_q égaux à l'unité.

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées.

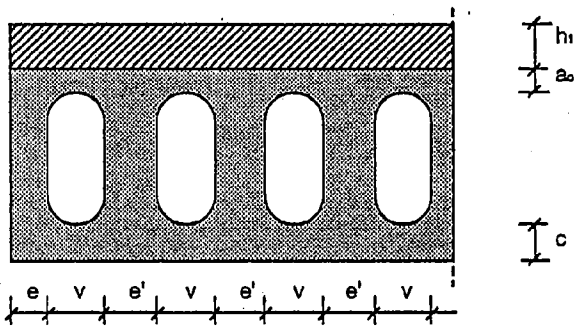


Fig. 13 – Notations.

Remarque

Pour des charges linéaires parallèles à la portée des dalles, on peut les remplacer par un certain nombre de charges concentrées dont on multipliera la valeur par 0,9 si ces charges linéaires sont des charges permanentes $\left(0{,}9 = \frac{1{,}35}{1{,}5}\right)$.

5.1. MODE D'EMPLOI

Ligne 2 **L, b, b_n, JG, IG, fc_6, f_c, E, N_r**

L = portée (m) entre nus pour des dalles sur poutres ou voiles, entre axes pour appuis néoprène
b = largeur (m) totale d'un panneau de dalle
b_n = largeur (m) nette d'un panneau de dalle (totale – clé)
JG = nombre de panneaux
IG = nombre de points de calcul de même flèche entre deux dalles
f_{c6} = résistance (MPa) du béton de la dalle
f_c = résistance (MPa) du béton de la table rapportée d'épaisseur H1
E = module d'Young du béton de la dalle (MPa) (correspondant à FC6)
N_r = nombre de rectangles du système multitube (1 à $\frac{N_v + 1}{2}$ en général 1). Plus ce nombre est élevé, plus est important le cisaillement des ailes et faible le cisaillement des âmes.

Ligne 3 **IB_{sud}, IB_{nord}**

IB_{sud} = 0 pour le bord d'extrémité sud sur appuis simples (le bord de la dalle non chargée)
= 1 pour le bord libre
IB_{nord} = dito pour le bord nord

Ligne 4 **j, D_j**

j = numéro du panneau dont le moment d'inertie de torsion est à diminuer
Si j = 0, aller en ligne 4bis
D_j = coefficient réducteur de la raideur à la torsion du panneau n° j.
Ce coefficient tient compte d'une fissuration due à la torsion sur une certaine longueur de la dalle entraînant une diminution de la raideur à la torsion ($D_j \leq 1$).
Ces coefficients sont à utiliser lorsque la raideur de certains panneaux entraîne des contraintes supérieures aux cisaillements limites. On peut alors réduire la raideur à la torsion jusqu'à ce que le cisaillement soit inférieur au cisaillement limite. On augmente ainsi la valeur du moment de flexion repris par le panneau.

Ligne 4bis **k, D_k**
k = numéro du panneau dont le moment d'inertie de flexion est à diminuer
Si k = 0, aller en ligne 5
D_k = coefficient réducteur de la raideur à la flexon du panneau n° k.
Ce coefficient tient compte d'une fissuration due à la flexion sur une certaine longueur de la dalle entraînant une diminution de la raideur à la flexion ($D_k \leq 1$).
Ces coefficients sont à utiliser lorsque la raideur de certains panneaux entraîne des moments supérieurs aux moments limites. On peut alors réduire la raideur à la flexion jusqu'à ce que le moment soit inférieur au moment limite. On augmente ainsi la valeur du moment de torsion repris par le panneau.

Ligne 5 **γ_g, γ_q**

γ_g = coefficient majorateur des charges réparties (en général = 1,35)
γ_q = coefficient majorateur des charges concentrées (en général = 1,5)

S'il existe des charges d'exploitation réparties, on rentrera leurs valeurs majorées par le coefficient 1,11 (= 1,5/1,35)

Ligne 6 **Nature, a_1, a_2, h, ϖ, a_p**

Nature = nature de la charge répartie (par exemple : dalle, table, trottoir, étanchéité,...)
La 1re charge décrite correspondant obligatoirement à la dalle alvéolée seule (sans table de compression rapportée)
a_1 = abscisse (m) du début de la charge

a_2 = longueur (m) de la charge
h = épaisseur (m) ou charge (kN/m ^{2})
ϖ = poids spécifique (kN/m^3) si h est l'épaisseur, sinon $\varpi = 0$
$a_p = 0$ si la charge est appliquée avant clavage (poids propre de la dalle et dalle de compression coulée en même temps que le clavage, ...),
= 1 pour les charges appliquées après clavage (étanchéité, trottoirs, ...)
Retour Ligne 6 pour une nouvelle charge répartie, sinon : FIN

Ligne 7 j, k, P, a, e

j = numéro du panneau où est située la charge P
k = numéro de la charge sur le panneau j
P = Charge concentrée (kN)
a = abscisse m) de la charge le long de la dalle
e = excentricité (m) de la charge par rapport à son milieu
Retour Ligne 7 pour une nouvelle charge concentrée, sinon : 0

Ligne 8 $e, e', a_o, c, \nu, N_\nu, z, \tau_l$

e = épaisseur minimale (mm) de l'âme de bord d'un panneau
e' = épaisseur minimale (mm) des âmes intérieures
a_o = épaisseur minimale (mm) de la partie pleine supérieure de la dalle alvéolée
c = épaisseur minimale (mm) de la partie pleine inférieure de la dalle alvéolée
ν = largeur maximale (mm) des alvéoles
N_ν = nombre d'alvéoles de largeur ν
z = bras de levier (mm) de la dalle totale (dalle + table)
τ_l = cisaillement limite (MPa) de l'interface entre dalle et table (dépend de f_{c28} et de l'état de ruguosité de la surface, par exemple 1,25 MPa pour f_{c28} = 25 MPa et des indentations au moins égales à 6 mm de profondeur).

Ligne 9 $h_o, h_1, S_o, I_o, \nu_o, d', A_p, P_m, f_{peg}, f_{prg}$

h_o = épaisseur (mm) de la dalle seule
h_1 = épaisseur (mm) de la table rapportée
S_o = aire (cm^2) de la section droite de la dalle seule
I_o = moment d'inertie (cm^4) de la dalle seule
ν_o = distance (mm) du centre de gravité de la dalle seule à sa fibre supérieure
d' = distance (mm) du centre de gravité des aciers à la fibre inférieure
A_p = aire (mm^2) de la section d'armatures de précontrainte
P_m = précontrainte moyenne après pertes (kN)
f_{peg} = limite élastique des aciers de précontrainte (MPa)
f_{prg} = résistance garantie des aciers de précontrainte (MPa)

A défaut d'être communiqués par le fabricant, les inerties et bras de levier peuvent être calculés avec le programme « CARAMEC ».

5.2. EXEMPLE . DONNÉES

Prenons l'exemple calculé à la main ci-dessus.

```
DATA Test 4 panneaux                                  ' Titre
DATA 9.4,1.2,1.13                                     ' L, b, b_net
DATA 4,1                                              ' Nbr panneaux, nbre points
DATA 50,25,36000,1                                    ' f_c28, f_c28, E, Nbre rect. torsion
DATA 0,0                                              ' Conditions d'extrêmités
DATA 0                                                ' Pas de réduction de GK
DATA 0                                                ' Pas de réduction de EI
DATA 1.35,1.5                                         ' Coefficients ch. répart., ch. conc.
DATA Dalle,0,9.4,4.6,0,0                              ' Ch. rép. : nom, a1, a2, h, ϖ, ap
DATA FIN                                              ' Fin description ch. réparties
DATA 2,1,60,4.7,0.1                                   ' Ch. conc. : j, k, P, a, e
DATA 3,1,60,4.7,-0.1                                  ' dito
DATA 0                                                ' Fin description ch. conc.
DATA 61,54,35,45,64,9,233.3,1.25                      ' e, e', ao, c, ν, Nν, z, τi
DATA 250,50,2100,137169,127.1,45,930,1210,1660,1860   ' ho, h1, So, Io, νo, d', Ap, Pm, fpeg, fprg
DATA FIN
```

5.3. RÉSULTATS

```
================================================================================
DONNEES
-------
TEST 4 panneaux
 4 Panneaux
 1 Points de Calcul par Panneau
Bord extreme Gauche simplement appuye
Bord extreme Droit  simplement appuye
Resistance Beton Table = 25.0 MPa
Resistance Beton Dalle = 50.0 MPa

Charges Reparties (hors coeff. = 1.35)
--------------------------------------
 debut  long.   ep.   ps       p     soit
   m      m      m   kN/m3   kN/m2  kN/m
 0.000  9.400               4.600  5.520  dalle avant Clavage
Charge Repartie Totale non Ponderee par Panneau =  51.89 kN

Charges Concentrees (hors coeff. = 1.50)
----------------------------------------
Panneau Charge  absc.      P        P      exc.  Dist.  Dist.
  No      No     m        kN     tonnes     m    Rive  Charg.1
   2      1     4.700    60.00   6.116   0.100  1.900  0.000
   3      1     4.700    60.00   6.116  -0.100  2.900  1.000
Total des Charges Concentrees non Ponderees = 120.00 kN (soit  12.23 tonnes)
```

```
Portee                  = 9.400 m
Largeur Totale          = 1.200 m
Largeur Nette           = 1.130 m
Epaisseur Table         = 0.050 m
Epaisseur Ame de Bord = 0.061 m (limitee a h/6 = 0.050 m)
Epaisseur Ame Inter.  = 0.054 m (limitee a h/6 = 0.050 m)
Epaisseur Aile Sup.     = 0.035 m
Ep. Aile Sup. + Table = 0.085 m (limitee a h/6 = 0.050 m)
Epaisseur Aile Inf.     = 0.045 m
Bras de Levier : z      = 0.233 m
Largeur des Vides       = 0.064 m
Epais. cumulee Ames     = 0.554 m
Nombre de Vides         = 9

Caracteristiques de la Section a la Torsion :
----------------------------------------------
          i =     1       Ensemble
t(i)      = 0.54000
ds/e(i)   = 55.70000      55.70
Omega(i)  =  0.27270      0.2727
K(i)      =  0.00534      0.005340
T(i)      =  1.00000      1.0000

Module d'Young Instantanne                E =  36000 MPa
Coefficient de Poisson                      = 0.00
Moment d'Inertie Flexion Longitudinale : I = 0.00246380 m4
Raideur a la Flexion Longitudinale :    EI =  88.70 MPa.m4
Aire Ligne Moyenne Section creuse : Omega = 0.2727 m2
Moment d'Inertie de Torsion               K = 0.005340 m4
Raideur a la Torsion                     GK =  81.46 MPa.m4
Cisaillement Limite Interface Table-Dalle  = 1.25 MPa

Aciers de Precontrainte :
-------------------------
Aire Acier de Precontraite        Ap =  930 mm2
Distance des Aciers a la Sous-Face d'= 0.045 m
Force de Precontrainte apres Pertes  = 1210.0 kN
Limite Elastique  de l'Acier BP      = 1660 MPa
Resistance Garan. de l'Acier BP      = 1860 MPa

Dalle :          sans Table  avec Table
Epaisseur (cm)     =  25.00      30.00
Section (cm2)      = 2100.0     2700.0
v  (cm)            =  12.71      14.33
v' (cm)            =  12.29      15.67
Inert.Flex. (cm4)  = 137169     246380

Contrainte Moyenne de Compression du Beton =  4.48 MPa
Resistance Beton a la Traction CPT         =  3.60 MPa
PATIENTEZ ...

RESULTATS
---------
Reactions entre Panneaux
  x            Panneau No :
               1        2        3        4
 4.70  -63.872  -71.054   -0.000   71.054   63.872
```



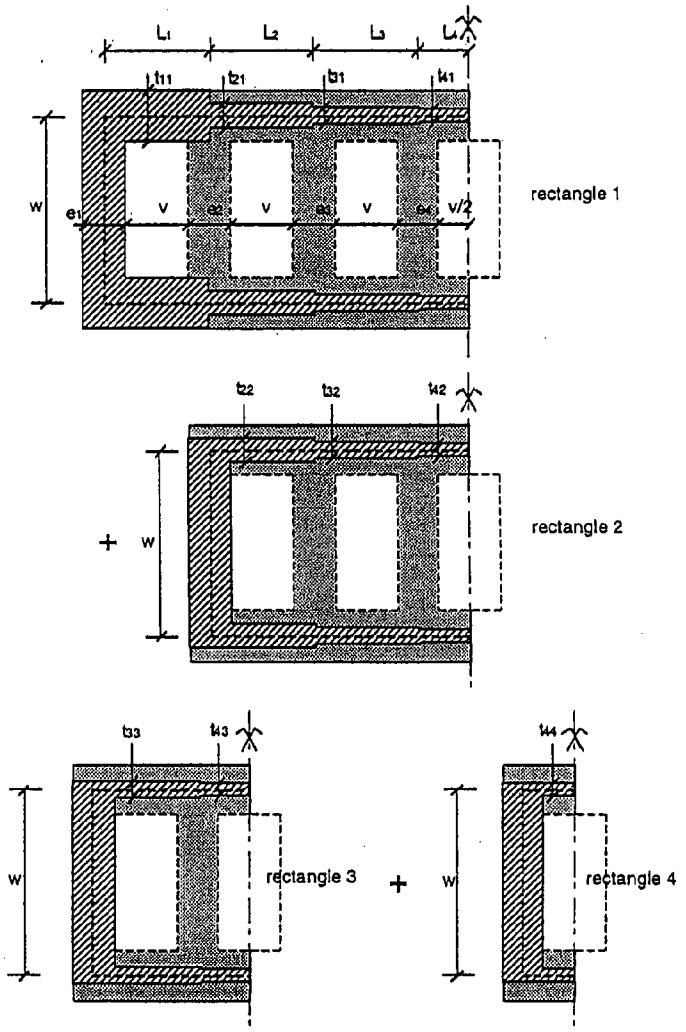
```
      Panneaux  :    1        2        3        4

Efforts Tranchants en kN
  en x =  0.00 m    38.62    44.50    44.50    38.62
  en x =  4.70 m    -3.59    -9.47    -9.47    -3.59
  en x =  9.40 m   -38.62   -44.50   -44.50   -38.62


Moments de Torsion en kNm
  en x =  0.00 m   -40.48   -25.82    25.82    40.48
  en x =  4.70 m    40.48    25.82   -25.82   -40.48
  en x =  9.40 m    40.48    25.82   -25.82   -40.48

Moments de Flexion en kNm
  en x =  0.00 m     0.000    0.000    0.000    0.000
  en x =  4.70 m    99.186  126.829  126.829   99.186
  en x =  9.40 m     0.000    0.000    0.000    0.000

Fleches en mm (ponderees par les gamma)
x = 4.70 m   fe =     2.80     4.59     2.80     0.00
             fw =     0.00     2.80     4.59     2.80

Pour le Panneau  2 et au Droit de Chaque Charge Concentree
-----------------
   x       Vg       Vd       Tg       Td       M        fe       fw
   m       kN       kN       kNm      kNm      kNm      mm       mm
 4.700     9.47    -9.47   -16.816   16.816   126.829   4.590    2.802

Pour le Panneau  3 et au Droit de Chaque Charge Concentree
-----------------
   x       Vg       Vd       Tg       Td       M        fe       fw
   m       kN       kN       kNm      kNm      kNm      mm       mm
 4.700     9.47    -9.47    16.816  -16.816   126.829   2.802    4.590

Verification des Cisaillements (MPa)
------------------------------------
Absc.   TorsAme TorsAileSup TorsAileInf TranchAme  Ame    Aile   Maxi   CPT
(1ere Ligne = a Gauche, 2eme Ligne = a Droite)

Panneau  1
 0.000    1.48      1.48       1.65       0.30     1.78   1.65   1.78   2.04
 4.700    1.48      1.48       1.65       0.03     1.51   1.65
          1.48      1.48       1.65       0.03     1.51   1.65
 9.400    1.48      1.48       1.65       0.30     1.78   1.65   1.78   2.04
Panneau  2
 0.000    0.95      0.95       1.05       0.34     1.29   1.05   1.29   2.04
 4.700    0.95      0.95       1.05       0.07     1.02   1.05
          0.95      0.95       1.05       0.07     1.02   1.05
 9.400    0.95      0.95       1.05       0.34     1.29   1.05   1.29   2.04
Panneau  3
 0.000    0.95      0.95       1.05       0.34     1.29   1.05   1.29   2.04
 4.700    0.95      0.95       1.05       0.07     1.02   1.05
          0.95      0.95       1.05       0.07     1.02   1.05
 9.400    0.95      0.95       1.05       0.34     1.29   1.05   1.29   2.04
Panneau  4
 0.000    1.48      1.48       1.65       0.30     1.78   1.65   1.78   2.04
 4.700    1.48      1.48       1.65       0.03     1.51   1.65
          1.48      1.48       1.65       0.03     1.51   1.65
 9.400    1.48      1.48       1.65       0.30     1.78   1.65   1.78   2.04
```

```
 Droit de Chaque Charge Concentree

sc.   TorsAme TorsAileSup TorsAileInf TranchAme  Ame   Aile  Maxi   CPT
ere Ligne = a Gauche, 2eme Ligne = a Droite)

nneau  2
.700    0.62       0.62       0.69       0.07      0.69  0.69
        0.62       0.62       0.69       0.07      0.69  0.69
nneau  3
.700    0.62       0.62       0.69       0.07      0.69  0.69
        0.62       0.62       0.69       0.07      0.69  0.69

saillement CPT OK

rification de la Flexion
------------------------
ment du aux Char. Perm.= 60.968 kNm  Moment du aux Ch. Var.= 29.681 kNm
ment ELU Mu    = 126.829 kNm
/(bd2sigmabu) = 0.103
rce de Precontrainte apres Pertes = 1210.0 kN
ntraintes a Vide : Haut =  2.68 MPa ; Bas =  8.74 MPa ; Niveau Cable =  7.65 MPa
bre Neutre a  0.0348 m
map du a Ch.Perm.= 1301.1 MPa ; du a 5 sc =   38.26 MPa
silonp du a Pm   =  6.85 o/oo ; du a 5 sc =  0.20 o/oo ; du a Mu = 10.00 o/oo
silonp total     = 17.05 o/oo
ntrainte Sigmap  = 1523.29 MPa
ment Resistant   = 304.3355 kNm

        EN CONCLUSION :
fort Tranchant Maximum    =  44.497 kN
ment Flechissant Maximum = 126.829 kNm
ment de Torsion Maximum   =  40.478 kNm
saillement Maximum        = 1.783 MPa < 2.04MPa
saillement Interface Max.= 0.16 MPa < 1.25 MPa OK
sail.Max/Cisail.Adm.      = 0.874  OK (< 1)
ment Max/Moment Resist.   = 0.417  OK (< 1)
ree de Calcul =  1 Minutes ,  5 Secondes  , le 16/09/1996
```

6. TORSION. ÉTUDE D'UN MULTITUBE À PAROIS MINCES

rapelle les équations des tubes minces d'épaisseur e, valeur qui peut être variable avec bscisse curviligne s de la ligne moyenne.
re comprise à l'intérieur de la ligne moyenne : Ω

Moment d'inertie de torsion : $K = \dfrac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{e}}$ Contrainte de cisaillement : $\tau = \dfrac{T}{2e\Omega}$.



On peut considérer le multitube comme équivalent à la somme de n tubes concentriques ayant la même rotation, en partageant l'épaisseur commune à plusieurs tubes telle que la contrainte de cisaillement soit la même.

Chaque tube reprend une partie du moment de torsion T telle que : $\sum_{i=1}^{n} T_i = T$ (1)

Chaque tube a un moment d'inertie de torsion K_i telle que : $\sum_{i=1}^{n} K_i = K$ (2)

La rotation identique pour chaque tube s'écrit : $\frac{d\theta}{dx} = \frac{T_1}{GK_1} = \frac{T_2}{GK_2} = \frac{T_3}{GK_3} = \ldots = \frac{T}{GK}$ (3)

d'où : $T_i = \frac{TK_i}{K}$ (4)

La contrainte dans un même élément i est la même quel que soit le tube j d'épaisseur t_{ij}.

$$\tau_i = \frac{T_1}{2t_{i1}\Omega_1} = \frac{T_2}{2t_{i2}\Omega_2} = \frac{T_3}{2t_{i3}\Omega_3} = \ldots \quad (5)$$

D'où l'on tire l'épaisseur t_{ij} en fonction du cisaillement : $t_{ij} = \frac{T_i}{2\tau_i\Omega_j}$

Or l'épaisseur t_i du tube réel est la somme des épaisseurs fictives t_{ij}.

$$t_i = \sum_{j=1}^{i} t_{ij} = \sum_{j=1}^{i} \frac{T_i}{2\tau_i\Omega_j} = \frac{1}{2\tau_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{T_i}{\Omega_j}$$

D'où l'on tire le cisaillement : $\tau_i = \frac{1}{2t_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{T_i}{\Omega_j}$ et l'épaisseur t_{ij}, ayant ainsi éliminé τ_i :

$$t_{ij} = t_i \frac{T_i}{W_j} \frac{1}{\sum_{k=1}^{i} T_k/\Omega_k} \quad (6)$$

On calcule alors par approximations successives à partir d'une épaisseur *a priori* $t_{ij} = \frac{t_i}{i}$ les valeurs suivantes :

Ω_i = aire à l'intérieur de la ligne moyenne du tube i,

$\int_i \frac{ds}{e}$ = somme des rapports longueur d'un élément sur son épaisseur de tout le pourtour du tube i

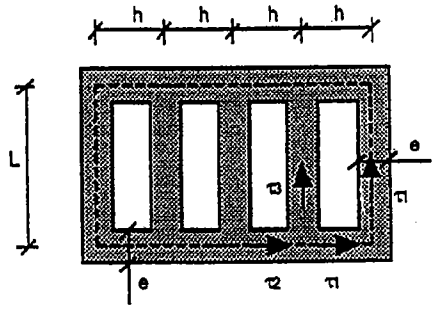
$K_i = \frac{4\Omega_i^2}{\int_i \frac{ds}{e}}$ et K d'après éq. (2)

T_i d'après éq. (4)

t_{ij} d'après éq. (6), valeurs que l'on prend pour recommencer un tour de calcul.
La convergence est moyennement rapide, 16 tours pour avoir une précision de 2 décimales sur la contrainte de cisaillement qui doit être identique au même endroit, quel que soit le tube.

EXEMPLE

Épaisseur des parois identiques : e = 50 mm
Moment de torsion T = 0,10 MNm
Valeurs *a priori* de t_{11} et t_{12} : 25 mm
L = 250 mm et h = 110 mm



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_1	0,025	0,0301	0,0329	0,0345	0,0354	0,036	0,0364	0,0366	0,0368	0,0369
t_2	0,025	0,0199	0,0171	0,0155	0,0146	0,014	0,0136	0,0134	0,0132	0,0131
O_1	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
O_2	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055
Σ_1	36,4	33,403	32,172	31,561	31,221	31,018	30,892	30,812	30,759	30,725
Σ_2	27,6	32,145	35,737	38,35	40,186	41,454	42,321	42,911	43,311	43,582
K_1	0,0013	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016
K_2	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
T_1	0,0752	0,0794	0,0816	0,0829	0,0837	0,0842	0,0846	0,0848	0,0849	0,085
T_2	0,0248	0,0206	0,0184	0,0171	0,0163	0,0158	0,0154	0,0152	0,0151	0,015
τ_1	6,84	7,22	7,42	7,54	7,61	7,66	7,69	7,71	7,72	7,73

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ_3	4,51	3,75	3,34	3,10	2,96	2,87	2,81	2,77	2,74	2,72
τ_{21}	13,67	11,97	11,28	10,93	10,74	10,63	10,56	10,52	10,49	10,47
τ_{22}	9,02	9,44	9,77	9,99	10,14	10,24	10,31	10,35	10,38	10,40
t_1	0,0301	0,0329	0,0345	0,0354	0,036	0,0364	0,0366	0,0368	0,0369	0,037
t_2	0,0199	0,0171	0,0155	0,0146	0,014	0,0136	0,0134	0,0132	0,0131	0,013

ı 10 tours, on obtient une contrainte moyenne τ_2 de 10,43 MPa, les autres valant 2,72 et 7,73 Pa.

emarque

vec un seul tube, en négligeant les parois intérieures, on a :

$= 0{,}44 \times 0{,}25 = 0{,}11\ m^2$

$= \dfrac{T}{2e\Omega} = \dfrac{0{,}1}{2 \times 0{,}05 \times 0{,}11} = 9{,}09$ MPa

: fait de prendre deux tubes au lieu d'un, diminue le cisaillement maximum dans l'aile : 9,09 lieu de 10,47 MPa (−13 %), mais l'augmente dans l'âme : 9,09 au lieu de 7,73 MPa (+18 %).

PROGRAMME « MULTUB » *

ogramme de calcul du cisaillement de torsion des tubes rectangulaires multicellulaires.
:s données sur une même ligne sont à séparer par une virgule.

gne 1 **T, Nr, Nv**
T = moment de torsion en kNm

Nr = nombre de rectangles de calcul compris entre 1 et Entier $\left(\dfrac{Nr}{2} + 1\right)$

Nv = nombre d'alvéoles

gne 2 ***b, h***
b = largeur nette du rectangle extérieur (mm)
h = hauteur totale (mm)

gne 3 ***e, e', a, c, v***
e = épaisseur de l'âme de bord (mm)
e' = épaisseur des âmes intérieures (mm)

* Disponible aux Presses des Ponts et Chaussées.

a = épaisseur de l'aile supérieure (mm)
c = épaisseur de l'aile inférieure (mm)
v = largeur d'une alvéole (mm)

Exemple de données

```
100,2,4                 ' T, Nr, Nv
490,300                 ' b, h
50,50,50,50,60          ' e, e', a, c, v
```

Résultats

```
DONNEES
-------
Largeur totale dalle    = 0.490 m
Epaisseur de la dalle   = 0.300 m
Epaisseur ame de bord   = 0.050 m
Epaisseur ame interne   = 0.050 m
Epaisseur aile inf.     = 0.050 m
Epaisseur aile sup.     = 0.050 m
Epaisseur des vides     = 0.060 m
Hauteur des vide        = 0.200 m

Caracteristiques de la Section a la Torsion :
---------------------------------------------
        i =     1          2        Ensemble
t(i)      =   0.11000    0.11000
ds/e(i)   =  30.66502   44.06573    74.73
Omega(i)  =   0.11000    0.05500     0.1650
K(i)      =   0.00158    0.00027     0.001853
T(i)      =   0.08518    0.01482     0.1000

Cisaillements pour un Moment de Torsion = 0.10000 MNm
-------------
Element :       1        2       Maxi
tsup (MPa) =  7.74    10.44    10.44
tame (MPa) =  7.74     2.69     7.74
tinf (MPa) =  7.74    10.44    10.44

Cisaillement maximum = 10.44 MPa
```

STRUBAT

PROGRAMMES DE CALCUL DES STRUCTURES DE BÂTIMENT

par Henry THONIER

Programmes décrits dans l'ouvrage *Conception et calcul des structures de bâtiment* (tomes 1, 2, 3 et 4), disponibles sur disquettes aux Presses des Ponts et Chaussées.
Immédiatement utilisables sur tout micro-ordinateur disposant du langage MS-DOS QBasic.

TOME 1

(Action du vent, semelles superficielles)

STODOLA
Calcul des périodes de vibration propre suivant Stodola-Vianello ou la méthode matricielle, calcul des structures au vent suivant NV 65 et au séisme suivant PS 92.

RAYLEIGH
Calcul de la période de vibration propre des structures suivant la méthode de Rayleigh, calcul au vent suivant NV 65 et au séisme suivant PS 69.

TASSOL
Calcul de tassement des semelles superficielles en terrains multicouches.

SEMDEV
Semelles rectangulaires en flexion déviée – Calcul des contraintes du sol – Diagrammes triangulaires ou rectangulaires.

SEMRECT
Semelles rectangulaires en béton armé BAEL 91 et DTU 13.1 – Dimensionnement et ferraillage.

TOME 2

(Pieux, semelles sur pieux, dalles, planchers)

PIEUHOR
Efforts horizontaux sur des têtes de pieux dans un terrain multicouche.

FLEXCOMP
Flexion composée en béton armé de sections quelconques. Vérification ou courbes d'interaction.

SEMPIEUX
Semelles sur pieux en béton armé. Dimensionnement et ferraillage.

'ARAMEC
'aractéristiques mécaniques de sections quelconques.

OUAPELA
outres sur appuis ponctuels élastiques.

NERTORS
loments d'inertie de flexion et de torsion de section rectangulaire ou en Té.

'OUCROI
lanchers à poutres croisées.

'LANCM
lanchers métalliques. Calcul des sollicitations, contraintes et détermination des profilés.

OUELAS [1]
outre ou dalle rectangulaire sur sol élastique avec ou sans décollement, soumise à des charges uelconques.

AVIER [1]
alle rectangulaire, appuyée sur 4 cïtés, chargée sur des rectangles – Calcul des sollicitation.

ALLRECT [1]
alle rectangulaire sur 4 cïtés articulée sur 2 cïtés opposés – Chargement trapézoïdal total – alcul des sollicitations.

ALLCIRC [1]
alle circulaire articulée ou encastrée sur son pourtour, sous chargement trapézoïdal de volution – Calcul des sollicitations.

ALLRUPT3 [1]
alle de forme quelconque sous chargement quelconque calculée à la rupture – Calcul des llicitations.

LECHE2 [1]
alle et poutre rectangulaire ou en Té sous différents chargements à différentes dates.

TOME 3

(Poteaux, portiques, poutres, voiles)

EFPOT
alcul des excentricités de deuxième ordre des poteaux en matériau homogène pour une xcentricité du premier ordre donnée.

1 Programmes antérieurement diffusé sous le nom de DALLES_BA par les Presses des Ponts et Chaussées

LONGFLAM
Calcul de la longueur au flambement de poteaux de section rectangulaire, ou circulaire en fonction des raideurs des poutres et poteaux en tête et en pied.

PELQ
Vérification au flambement de poteau de section rectangulaire, circulaire ou quelconque en béton armé, quel que soit l'élancement.

FLEXRECT
Vérification en ELU de sections rectangulaires en béton armé partiellement tendues en flexion.

POTO
Dimensionnement, ferraillage et métré de poteaux rectangulaires ou circulaires en béton armé.

FLEXDEV
Vérification de section quelconque en béton armé en flexion déviée avec ou sans effort normal.

TREILLIS
Détermination ou vérification des profilés des poutres-treillis.

VOUTE
Calcul des voûtes de décharge des maçonneries suivant BAEL 91.

POUCLO
Ferraillage et métré des poutres-cloisons suivant BAEL 91.

UNFILOU
Calcul des voiles à une file d'ouvertures sous charges différentielles verticales.

POCO [2]
Calcul des sollicitations *(chaîné avec les programmes BAEL, EC2, ACI, DIN, BS, PLADA, PLB et CM).*

BAEL [2]
Poutre continue suivant le BAEL 91 – Section d'aciers et contraintes.

EC2 [2]
Poutre continue suivant l'Eurocode 2 – Section d'aciers et contraintes.

ACI [2]
Poutre continue suivant l'ACI 318-89 (USA) – Section d'aciers et contraintes.

DIN [2]
Poutre continue suivant le DIN1045 (Allemagne) – Section d'aciers et contraintes.

2 Programme antérieurement diffusés par l'ITBTP.

; ²
ıutre continue suivant le BS 8110 (UK) – Section d'aciers et contraintes.

.ADA ²
ınchers-dalles suivant BAEL 91 – Calcul des sollicitations, contraintes et aciers.

.B ²
ılle continue précontrainte à torons non-adhérents suivant le BPEL 91 – Section d'aciers et ntraintes.

M ²
ıutre continue suivant les CM 66 – Contraintes.

TOME 4

\LRETRA
ılles rectangulaires sous charges réparties trapézoïdales.

\LVEOS
ılcul de dalles alvéolées sous charges réparties et concentrées.

'AISDAL
ıaisseur des dalles portant dans une direction selon BAEL 91.

;CADRE
pacements successifs des cadres d'une travée de poutre soumise à des charges réparties, iformes, suivant trois méthodes, au choix.

IEQ
ètermination de l'inertie équivalente d'un voile à inerties variables par minimisation de la mme des produits *Effort de vent cumulé* × *variation de flèche*.

:NTEAUX
ılcul des voiles à *n* files d'ouvertures.

ULTUB
ılcul du cisaillement de torsion des tubes rectangulaires multicellulaires.

INDEX *

About de poutre (beam end), 759
Aciers, 67
Action : *voir* Charges
Ancrages de barres (bar anchorage), 1142
APD (Avant-projet détaillé), 1, 2
APS (Avant-projet sommaire), 1, 2
Assemblages (joint), 913
Auvent (eaves), 1494
Avis technique du CSTB (planchers), 607

Bacs collaborants : *voir* Dalles
Balcon (balcony), 1494
Banche (wall form), 983
Béton armé (reinforced concrete), résumé, 66
Béton banché (wall concrete), 983
Béton de fibre en dallage : *voir* Dallages
Bielle (strut) d'appui, 759
Bielles et tirants (struts & ties), 1050, 1431
Blévot (méthode des bielles), 414
Blocs de béton (concrete masonry units), 1014, 1019
Bois lamellé collé (glue laminated timber, glulam), 738
Boulonnage, 913
Briques (bricks), 1014, 1019
Bulbes de pression (de contrainte), 200
Bureau de contrôle, 2

Câbles non adhérents (unbounded tendons), 531, 546
Cadres épingles, étriers (links, ties, stirrups) (longueur), 1139
Caillebotis (grating), 670
Caractéristiques des sols (soil characteristics), 210
Centre de torsion (torsional center), 1300, 1334
Chaînage (floor tie), 987, 1016
Chaînage (maçonnerie), 1076
Changement de section (change of cross section), 759, 1471
Changements d'inertie des voiles, 1411
Charges (loads)
- concentrées sur dalle (concentrated loads on slabs), 474
- concentrées sur plancher nervuré (on ribbed floors), 635
- concentrées sur voile (concentrated load on wall), 994
- d'exploitation (live load or imposed load), 114
- de neige (snow load), 116
- de séismes (earthquake), 129
- de véhicules, 115
- de vent (wind), 118
- dynamique sur planchers (dynamic load on floor), 751
- en cours de travaux (during execution), 605
- localisées (concentrated loads), 604
- mobiles, 604
- permanentes (dead loads), 111
- triangulaires, 19

Cisaillement (shear stress)
- à la jonction aile-âme ou table-nervure (web-flange section), 24
- d'une section rectangulaire, 23
- en flexion composée (with axial load and flexure), 26

CM66-poteaux, 840
Code civil, 1
Coefficient de Westergaard (coefficients de ballast, d'élasticité du sol, module de réaction du sol), 305, 322
Combinaison d'action (load arrangement, load cases, combination of actions), 193
Connecteurs (connectors), 704

* Pages 1 à 350 : tome 1 ; pages 351 à 778 : tome 2 ; pages 779 à 1140 : tome 3 ; pages 1291 à 1650 : tome 4.

nsole (cantilever, corbel), 1494
courte, 1472, 1504
longue, 1514
ntrainte (stress)
dans une section, 4
de calcul du sol, 208
ntremarche (riser), 1524
ntre-plaqué (plywood), 740
ntreventement (wind-bracing), 1291
rbeau : *voir* Console courte, 1494, 1504
maillère (stringer), 1524

llages (slabs on grade)
calcul (design), 321
en béton de fibre (fiber concrete), 339
fondation (foundation), 329
sous charge concentrée (under axial load), 332
lles (slabs)
circulaires, 505
de forme quelconque, 510, 595
dispositions constructives (detailing), 601
épaisses (thick slabs), 604
mixtes à bacs collaborants (profiled steel sheeting), 589
précontraintes à câbles non adhérents, 531
précontraintes alvéolées (prestressed hollow core slabs), 570
rectangulaires portant dans une direction (one-way slabs), 472
rectangulaires simplement appuyée sur ses 4 côtés (two-way slabs), 1568
rectangulaires sur 2 côtés et encastrées, libres ou articulées sur les 2 autres, 482
rectangulaires sur 4 côtés, 475
suivant l'ACI318-89, 489
suivant le BS8110, 501

gression des charges
exploitation, 169
nsité : *voir* Poids spécifique
scente de charges (lowering of loads), 173

Déversement (lateral buckling), 860
Dimensionnement (design) : *voir* Pré-dimensionnement
Dispositions constructives (detailing),
- dalles, 601
- murs, 1016
- pieux, 362
- poteaux BA, 824
- voiles, 995

EC2-poteaux, 835
EC3-poteaux,847
EC4-poteaux, 852
EC5-poteaux, 858
Effort critique de flambement ou d'Euler, 784
Effort tranchant (shear force),4
Élancement (slenderness), 782
Élancement réduit, 847
ELS (SLS) état-limite de service (serviceability limit state), 195
ELU (ULS) état-limite ultime (ultimate limit state), 195
Emmarchement (tread length), 1524
Entrepreneur, 2
Entrevous (hollow core blocks) : *voir* Planchers
Épure d'arrêt des barres (curtailment), 1587
Escalier (staircases), 1494, 1524, 1529
- hélicoïdal (helical stair), 1533

Espacement des cadres (tie spacing), 1452, 1585, 1611
Étais actifs (active propping), 731
Étude d'un bâtiment (design of a building), 1539
Exécution des travaux (erection, execution of works), 2

File d'ouverture (opening row)
- 1 file, 1109
- n files, 1099

Flambement (buckling), 782
Flèche (déflexion), 5, 745
Flèche équivalente, 1404
Fondations (foundations)
- superficielles (shallow foundations), 197
- profondes (deep foundations), 391

Formulaire de poutres, 92
Funiculaire (catenary curve), 1034, 1042

Garde-corps (parapet), 1495
Giron (tread run), 1524
Glissement (sliding) des semelles, 223
Goujons (headed studs) : *voir* Connecteurs

Hauteur de marche (riser height), 1524

Index BAEL91, 1277
Inertie équivalente (equivalent moment of inertia), 1315, 1400
Interaction sol-structure, 267

Joints (settlement joints, structural joints, thermal joints of slab on grade) de dallage, 322
Lagrange, 471
Largeur efficace (effective width), 131
Lévy, 482
Liaison (joint)
- élément préfabriqué-élément coulé sur place (between precast and cast-in-place members), 686
- semelle-poteau (column-footing connection), 368
- table-nervure (web-flange connection), 758
- talon-âme (web-heel), 758

Ligne de foulée (walking line), 1524
Limon (string), 1524
Linteau (lintel), 1045
Linteaux (maçonnerie), 1076
Lisse (fixing rail), 1023, 1027
Longueur de flambement (effective length), 783, 796, 802, 847, 866
- voile, 991

Longrine
- de liaison (tie-beam), 460
- de redressement (balancing beam), 274, 461
- porteuses (supporting tie-beam), 461

Maçonnerie (masonry)
- armée (reinforced), 1073
- non armée (unreinforced), 1014

Maître d'œuvre (engineer), 2
Maître d'ouvrage (client, owner), 2
Marche (step), 1524
Méthode de Caquot, 2, 888
Méthode de Cross, 898
Méthode de la rigidité, 1346
Méthode des bielles (struts and ties method), 1431
- consoles, 1504
- en fondation superficielle, 231
- semelles sur pieux, 410

Méthode des coupures, 958
Méthode des lignes de rupture, 510, 1600
Méthode des rotations, 905
Module de réaction du sol : *voir* Coefficient de Westergaard
Moment
- dans une section, 5
- d'inertie (moment of inertia), 1293
- en travée (in the span), 27, 32
- maximal, 18
- statique, 1293
- sur appui (on support), 9, 27

Moment
Murs (walls), 983
Mur d'échiffre (string wall), 1524

Neige (snow), 103
Nœuds (joints)
- déplaçables, 877
- non déplaçables, 877

Nomenclature des aciers (bar schedule), 1576

Ossature (frame), 877
- en acier, 912
- en béton armé, 882

Ouvertures (openings, holes)
- dans les dalles, 1480
- dans les planchers (openings, hoists), 603
- dans voiles et murs, 1085, 1481

Paillasse (waist), 1524
Palée (sway frame), 1291
Palier (landing), 1524

nneaux de particules
particle board), 740
rois moulées (diaphragm walls), 462
rpaings : *voir* Blocs de béton
thologie des fondations, 340
riode de vibration propre (free
vibration frequency), 125
ux (piles)
- actions, 353
- capacité, 358
- définition, 351
- effort horizontal en tête, 370
- en acier, 358
- en béton, 359
- groupe de, 367
geaud, 477
n de coffrage, 1539
nchers (floors)
- à entrevous(hollow core slabs), 616
- à poutres croisées (cross beams), 470, 653
- bois (timber), 736
- caissons (waffle) : *voir* Planchers à poutres croisées.
- dalles (flat slabs), 470, 549
- inversés, 605
- métalliques, 670
- mixtes acier-béton (steel-concrete composite floors), 695
- mixtes bois-béton, 744
- nervurés (ribbed floors), 471, 633
- précontraint, 531
- types de, 760
ids volumique (volumic weight, density), 111
- maçonnerie, 1047
rtée de calcul (design span), 7
rtique (frame), 877
- multiple, 882
- simple, 878
teaux (columns)
- en acier, 840
- en béton armé, 804
- en béton armé-faible élancement, 818
- en béton armé-fort élancement, 804
- en bois, 858
- mixtes, 852
utre (beam, girder, joist)
- à talons (nib), 758
- baïonnette, 1486
- continue (continuous beam), 26, 610, 722
- courte, 1441
- de torsion, 1503
- échancrée, 1466
- sur appuis ponctuels élastiques, 637
- sur sol élastique, 296
Programmes
- « CARAMEC » (caractéristiques mécaniques des sections), 580
- « CONTREV » (contreventement de bâtiments), 1367
- « DALLCIRC » (dalles circulaires), 507
- « DALLRECT » (dalles rectangulaires), 484
- « DALLRETRA » (dalles rectangulaires), 1518
- « DALLRUPT » (dalles à la rupture), 522
- « DALVEOS » (dalles alvéolées précontraintes), 1637
- « EPAISDAL » (épaisseur des dalles), 1515
- « FLECHE2 » (flèches des poutres), 748
- « FLEXCOMP » (flexion composée de section quelconque), 381
- « FLEXDEV » (flexion déviée),862
- « INEQ » (inertie des voiles), 1324
- « INERTORS » (inertie de flexion et torsion), 646
- « LINTEAUX » (voiles à n files d'ouvertures), 1404
- « NAVIER » (dalles rectangulaires), 478
- « PIEUHOR » (pieux sous charges horizontales), 372
- « PLADA » (planchers dalles), 561
- « PLANCM » (planchers métalliques), 675
- « PORTBA » (portiques en béton armé), 938
- « PORTCM » (portiques métalliques), 946
- « PORTIQUE » (portiques), 922
- « POUAPELAS » (poutres sur appuis ponctuels élastiques), 637
- « POUCROI » (poutres croisées), 659
- « POUELAS » (poutres sur sols élastiques), 302
- « RAYLEIGH » (action du vent et du séisme), 164
- « SEMDEV » (semelles rectangulaires en flexion déviée), 216
- « SEMPIEUX » (semelles sur 1, 2, 3 et 4 pieux), 435
- « SEMRECT » (semelles superficielles rectangulaires), 249
- « STODOLA » (action du vent et du séisme), 144
- « TASSOL » (tassements de sols), 203
- « TREILLIS » (poutres treillis), 971
Puits (shafts), 364

Raccourcissement différentiel, 1095
Radiers (rafts, mats), 330
Rampe (ramp), 1494, 1521
Rayleigh, 125
Redistribution des moments (moment redistribution), 14
Règlements
- allemand DIN1045, 765
- américain ACI318-89, 489, 614, 765
- britannique BS, 501, 601, 765
- CB71, 737
- CCTG-Fasc.62, 223, 235, 359, 363
- CEB-Code modèle 90, 765
- CM66, 672
- Eurocode 2 (béton), 765
- Eurocode 3 (acier), 672
- Eurocode 4 (mixte acier-béton), 695, 698
- Eurocode 5 (bois), 737
Règles forfaitaires, 16, 28
Relevage des charges, 759
Résistance des matériaux (structural analysis), 3
Retrait (shrinkage), 605, 708
Retrait différentiel, 1118
Ritter-Mörsch, 1432
Rivetage, 913
Rotation, 5

Section réduite (voile), 993
Séisme (earthquake), 129
Semelles (footing)
- à niveaux décalés, 209
- avec charges excentrées, 211
- circulaires, 291
- décalées, 278
- dimensionnement, 226, 236
- en flexion déviée, 212
- excentrées, 271
- filantes sous poteaux (isolated footings), 288
- filantes sous voiles ou murs (continuous footings), 224
- nervurées (ribbed footings), 288
- non armées (plain concrete footings), 248
- poinçonnement (punching), 225, 233, 283, 287
- rectangulaires, 231
- rectangulaires avec flexion, 238
- sur pieux (généralités), 366, 410
- sur 1 pieu, 411
- sur 2 pieux, 413
- sur 3 pieux, 422
- sur 4 pieux, 427
Site, 984
Sol (capacité), 355
Soudage (welding), 913
Spinetta, 1
Stodola, 125
Surface de chargement (area of loading), 170

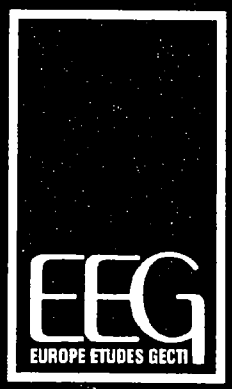
Tableaux de calcul (design tables)
- charges d'exploitation (live loads), 101
- dalles rectangulaires articulées sur les 4 côtés (two-way slabs), 478
- dimensionnement des poteaux (column design), 183
- dimensionnement des poutres (beam design), 179
- épaisseur des dalles (thickness of slabs), 176

– flexion simple et composée (bending without or with axial load), 45
– moments des poutres continues, 92
– poids spécifique, 98
– semelles superficielles (shallow foundations), 342
– semelles sur pieux (pile caps), 466
Tableaux (tables) (résumés)
– béton armé, 46
– dalles précontraintes par câbles non adhérents, 546
– déversement, 870
– longueur de flambement, 866, 867
– poteau BA, 871, 872, 873
– règlements (6 codes de calcul nationaux et internationaux), 765
– semelles superficielles, 342
– semelles sur pieux, 466
– torsion, 761
– type de planchers, 760
Tassement (settlement), 199
Tirant (tie), 1431
Torons (strands) : voir Câbles
Trémie : voir Ouvertures (openings), 1600
Trois moments (three moment method), 9
Types de poteaux, 780

Unité de passage (unit of exit width), 1527

Vent (wind), 118
– trapézoïdal, 1388
Voile (wall), 983
– extérieur, 987
– intérieur, 986
Volée (flight of stairs), 1524
Voûte de décharge (vault), 1032, 1045

Westergaard, 332



Agences en France :

Lille / Lyon / Marseille / Nice / Paris
Rennes / Tours / Strasbourg / Toulouse

Implantations à l'étranger :

Great Britain / Italy / South Korea
Mexico / Morocco / Portugal / Spain / USA

Siège social / Head office : 92-98 bd, Victor-Hugo - 92115 Clichy - FRANCE
Tél. 1/42 70 98 40 - Télex 630075 F - Fax 1/47 39 84 05